

CAPÍTULO VI

Magnetostática

Fundamento teórico

I.- Fuerza sobre una carga y movimiento de una carga en un campo magnético

Ia.- Fuerza magnética sobre una carga eléctrica

Dada una carga eléctrica q que se mueve con velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético \vec{B} , la fuerza magnética que experimenta es

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

y su módulo es $F = q v B \sin\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores \vec{v} y \vec{B} (figura 6-1).

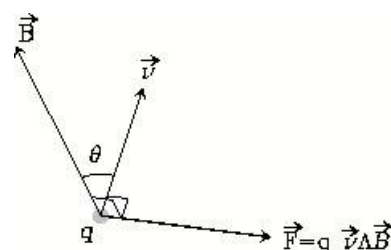


Figura 6-1

Ib.- Movimiento de una carga en el seno de un campo magnético uniforme

Es un movimiento helicoidal, con velocidad uniforme en la dirección del campo \vec{B} y movimiento circular y uniforme en el plano perpendicular a \vec{B} (figura 6-2). Si el eje Z coincide con la dirección de \vec{B} , la solución a la ecuación del movimiento es

$$x(t) = R \cos(\omega t + \varphi) \quad y(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \quad z(t) = z_0 + v_{0,z} t$$

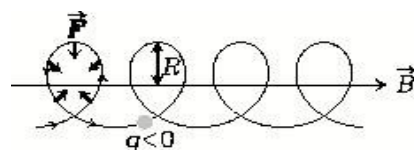


Figura 6-2

donde R es el radio de giro, t es el tiempo, z_0 y $v_{0,z}$ son la posición inicial y componente de la velocidad según el eje Z, y la frecuencia de rotación vale

$$\omega = \frac{qB}{m},$$

con q y m la carga y masa de la partícula.

Ib.- Fuerza centrípeta y radio de giro

Dado que la fuerza magnética, contenida en planos perpendiculares a \vec{B} , es centrípeta, podemos igualar

$$q v_{\perp} B = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v_{\perp}}{q B},$$

donde v_{\perp} es la componente de la velocidad en el plano perpendicular a \vec{B} (figura 6-3).

Ic.- Trabajo realizado por la fuerza magnética

El trabajo elemental realizado por la fuerza magnética sobre una carga eléctrica

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0,$$

y la energía cinética de una carga sometida únicamente a un campo magnético se conserva.

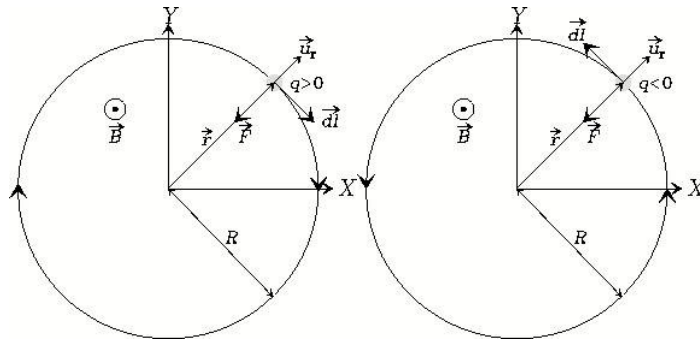


Figura 6-3

II.- Fuerza magnética y par de fuerzas sobre corrientes y espiras

IIa.- Fuerza sobre un elemento de corriente

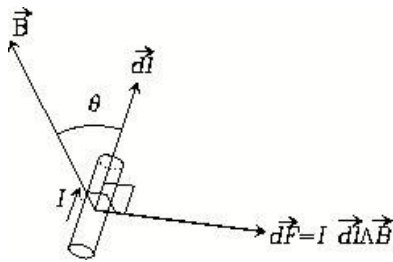


Figura 6-4

Dado un elemento de corriente $d\vec{l}$ por el que circula una corriente de intensidad I en el seno de un campo magnético \vec{B} , la fuerza magnética que experimenta es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

y su módulo es $dF = I dl B \sin\theta$, donde θ es el ángulo que forman los vectores $d\vec{l}$ y \vec{B} (figura 6-4).

IIb.- Fuerza sobre un elemento finito de corriente

Se obtiene integrando la expresión anterior:

$$\vec{F} = \int_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B},$$

donde C representa la curva seguida por el circuito. En el caso de un circuito cerrado o espira,

$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B},$$

y si además \vec{B} es uniforme en todos los puntos de la curva C , la fuerza neta es nula:

$$\vec{F} = I \left[\oint_C d\vec{l} \right] \times \vec{B} = 0$$

IIc.- Momento magnético de una espira

Dada una espira plana por la que circula una intensidad I y que encierra una superficie \vec{S} (dirección perpendicular a la superficie y sentido determinado por la regla de la mano derecha siguiendo el sentido de la

corriente), su momento magnético es (figura 6-5)

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

IIc.- Par de fuerzas sobre una espira

Dada una espira de momento magnético \vec{m} en el seno de un campo magnético \vec{B} , se ve sometida a un par de fuerzas cuyo momento del par \vec{M} viene dado por

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

y que tiende a alinear el momento magnético \vec{m} con el campo \vec{B} .

Una vez \vec{m} y \vec{B} están alineados, el momento del par $\vec{M} = 0$ y la espira está en situación de equilibrio estable (figura 6-5)

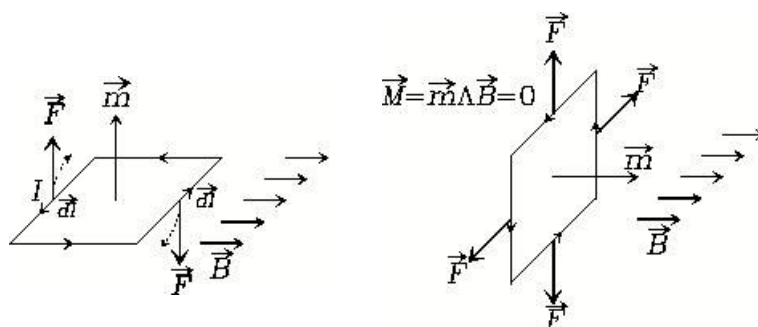


Figura 6-5

III.- Campo magnético generado por diversas distribuciones de corriente

IIIa.- Campo magnético generado por una carga en movimiento

Dada una carga q con vector posición \vec{r}' y vector velocidad \vec{v} , el campo magnético que genera en el punto de vector posición \vec{r} viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío.

IIIb.- Ley de Biot y Savart

Dado un elemento de corriente $d\vec{l}'$ con vector posición \vec{r}' y por el que circula una corriente de intensidad I (figura 6-6), el campo magnético $d\vec{B}(\vec{r})$ que genera en el punto de vector posición \vec{r} viene dado por

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

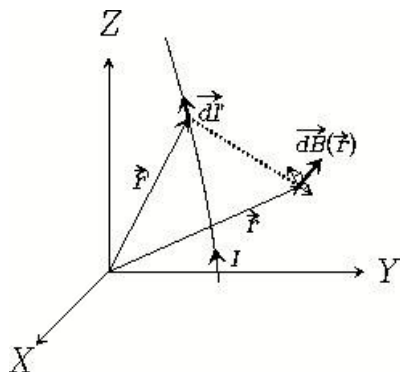


Figura 6-6

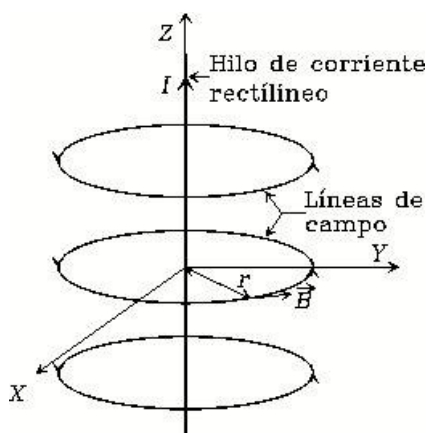


Figura 6-7

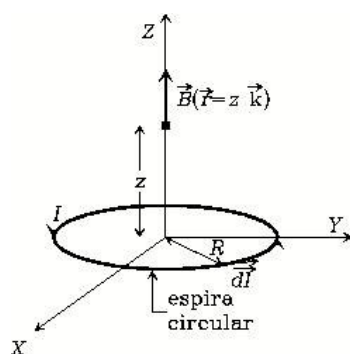


Figura 6-8

Integrando se obtiene el campo magnético generado por un elemento finito de circuito:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

donde C representa la curva seguida por el circuito. Si se trata de un circuito cerrado,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

IIIc.- Campo magnético generado por una corriente rectilínea e indefinida

Dado un hilo recto infinitamente delgado y largo por el que circula una corriente de intensidad I , el campo $\vec{B}(r)$ que genera a una distancia r viene dado por

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi,$$

donde se ha hecho coincidir el hilo con el eje Z , y \vec{u}_ϕ es el vector unitario azimutal. Las líneas de campo correspondientes son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo y centradas en éste (figura 6-7).

IIId.- Campo magnético generado por una espira circular en un punto de su eje

Dada una espira circular de radio R por la que circula una corriente de intensidad I (en el sentido indicado en la figura 6-8), el campo magnético que genera en un punto de su eje, el cual hacemos coincidir con el eje Z (centro de la espira en $z=0$) viene dado por

$$\vec{B}(\vec{r} = z \vec{k}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k},$$

IV.- La ley de Ampère

IVa.- Ley de Ampère: dadas una curva cerrada cualquiera C , y una superficie cualquiera S delimitada por C , la circulación del campo magnético \vec{B} a lo largo de C es μ_0 veces la suma de las intensidades de las corrientes que atraviesan S :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i,$$

donde cada intensidad debe tomarse positiva si tiene el sentido determinado por el recorrido de la curva C y según el criterio de la mano derecha (I_1 e I_N en la figura 6-9), y negativa en caso contrario (I_2 en la figura 6-9). La ley de Ampère es muy útil para determinar el campo \vec{B} creado por distribuciones de corriente con alta simetría.

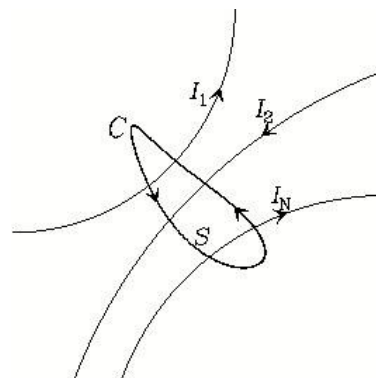


Figura 6-9

IVb.- Simetría cilíndrica:

En el caso de distribuciones de corriente con simetría cilíndrica (ejemplo simple en la figura 6-10, izquierda), las líneas de campo \vec{B} son circunferencias contenidas en planos perpendiculares al eje de simetría y centradas en ésta. Tomando como curva C una de estas circunferencias (radio r), el primer miembro de la ley de Ampère vale

$$\Phi = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r,$$

donde B es el módulo del campo magnético a una distancia r del eje de simetría.

IVc.- Simetría plana

En el caso de distribuciones de corriente con simetría plana (ejemplo simple en la figura 6-10, derecha), el campo \vec{B} es paralelo al plano. Tomando como curva cerrada el rectángulo de la figura, el primer miembro de la ley de Ampère vale

$$\Phi = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2Bb,$$

donde B es el módulo del campo magnético a una distancia a del plano de corriente.

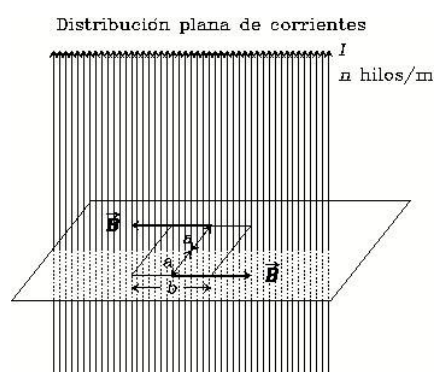
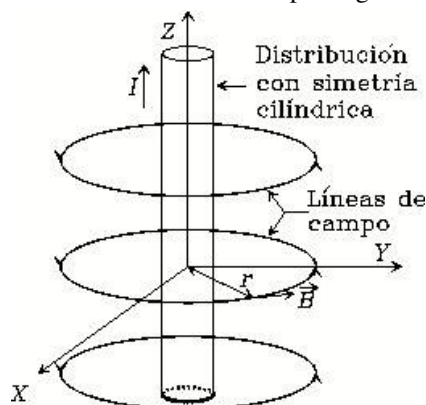


Figura 6-10

IVd.- Solenoide

En el interior de un solenoide recto ideal (figura 6-11), con n espiras por unidad de longitud, y por el que circula una corriente de intensidad I , el campo magnético es uniforme y paralelo a su eje, teniendo por módulo

$$B = \mu_0 n I.$$

En un solenoide toroidal, el campo está confinado en su interior y su módulo es

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r},$$

Donde N es el número total de espiras y r la distancia al centro de curvatura.

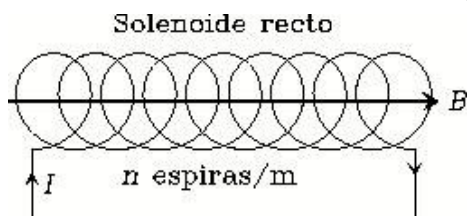
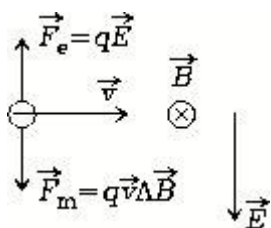


Figura 6-11

V.- Equilibrio en presencia simultánea de campos eléctricos y magnéticos

Va.- Equilibrio de una carga sometida a un campo eléctrico y magnético



Dada una carga q que se mueve con velocidad \vec{v} sometida simultáneamente a un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} (figura 6-12), la condición de equilibrio (fuerza neta sobre la carga nula) es

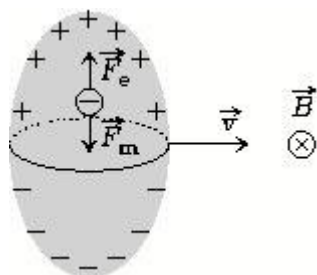
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}.$$

Si se cumple esta condición, el movimiento de la carga es rectilíneo y uniforme.

Figura 6-12

Vb.- Equilibrio de un conductor en movimiento en el seno de un campo \vec{B}

Dado un conductor que se mueve con velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético \vec{B} (figura 6-13), la fuerza magnética sobre los electrones genera una distribución de carga superficial que a su vez crea un campo eléctrico \vec{E} en el interior, de forma que en el equilibrio



$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

se cumple en cada punto del interior del conductor.

Figura 6-13

Vc.- Efecto Hall

Dada una corriente eléctrica de intensidad I fluyendo en un circuito en el seno de un campo \vec{B} perpendicular a la densidad de corriente (figura 6-14), la fuerza magnética sobre los electrones genera una distribución de carga superficial que a su vez crea un campo eléctrico \vec{E} en el interior, de forma que en el equilibrio

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

se cumple en cada punto del interior del conductor. La diferencia de potencial Hall vale

$$V_H = R_H \frac{BI}{x},$$

donde x es la dimensión transversal del conductor (en la dirección de \vec{B}), y R_H es el coeficiente Hall del conductor:

$$R_H = \frac{1}{nq},$$

siendo n la densidad de portadores y q el valor absoluto de su carga.

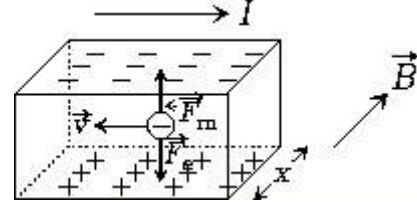


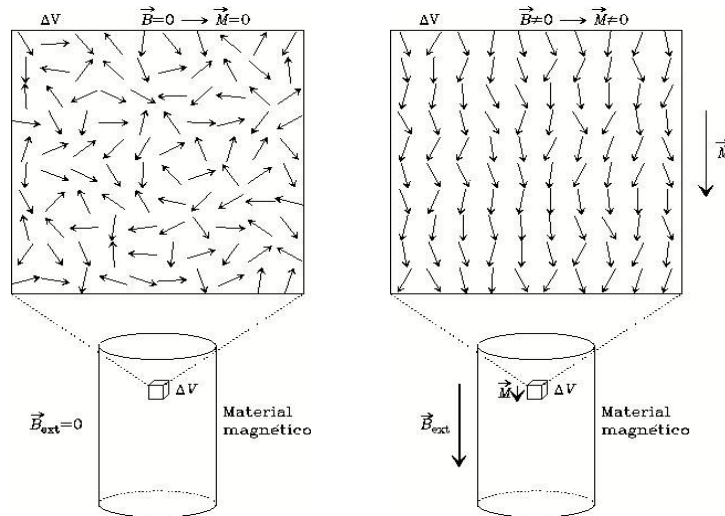
Figura 6-14

VI.- Materiales magnéticos

Via.- El vector imanación

En un material magnético, dado un elemento de volumen ΔV con vector posición \vec{r} , en el que tenemos N moléculas con momentos magnéticos $\{\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N\}$ (figura 6-15), el vector imanación $\vec{M}(\vec{r})$ en ese punto es

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} \quad \text{con} \quad \Delta \vec{m} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i.$$



Problema 6-15

1. Si el campo magnético \vec{B}_{ext} generado en ΔV por las corrientes exteriores al material es nulo, y éste es no ferromagnético, los momentos magnéticos están orientados al azar:

$$\vec{B}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{m} = 0 \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) = 0$$

2. Si el campo magnético \vec{B}_{ext} generado en ΔV por las corrientes exteriores al material no es nulo, y éste es no ferromagnético, los momentos magnéticos están en mayor o menor grado alineados con \vec{B}_{ext} :

$$\vec{B}_{ext} \neq 0 \Rightarrow \Delta \vec{m} \neq 0 \Rightarrow \vec{M}(\vec{r}) \neq 0 \quad \vec{M}(\vec{r}) \parallel \vec{B}_{ext}$$

VIIb.- Campo magnético generado por los momentos magnéticos

Dado un material con vector imanación \vec{M} , el campo magnético \vec{B}_m generado por los momentos magnéticos en el propio medio es

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}$$

VIIc.- Vector excitación magnética \vec{H}

Dado un elemento de volumen ΔV de un material magnético donde el vector imanación vale \vec{M} , y el campo magnético neto (que incluye tanto el efecto de las corrientes exteriores como el de los momentos magnéticos) vale \vec{B} , se define el vector excitación magnética \vec{H} como

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B} - \vec{B}_m}{\mu_0},$$

es decir, es $1/\mu_0$ veces el campo magnético generado sólo por las corrientes verdaderas o externas. El campo magnético neto es

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

VId.- Susceptibilidad y permeabilidad magnética

Dado un material magnético lineal (no ferromagnético), los vectores imanación \vec{M} y excitación magnética \vec{H} son proporcionales:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H},$$

donde χ_M es la susceptibilidad magnética del material. El campo magnético neto en el interior del material es

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H},$$

donde μ_r y μ son las permeabilidades relativa y absoluta del medio, respectivamente.

VIe.- Ley de Ampère para el vector \vec{H}

Dada una curva cerrada cualquiera C , y S una superficie cualquiera delimitada por C , la circulación del campo \vec{H} a lo largo de C es la suma de las intensidades de las corrientes reales que atraviesan S :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_i^{real},$$

con el mismo criterio de signos que el indicado en IVa.

VI f.- Dia, para, ferromagnetismo

Los materiales diamagnéticos se caracterizan por $\chi_M < 0$, $\mu_r < 1$, $\mu < \mu_0$. Los paramagnéticos se caracterizan por $\chi_M > 0$, $\mu_r > 1$, $\mu > \mu_0$. En los ferromagnéticos los vectores imanación \vec{M} y excitación magnética \vec{H} no son proporcionales, aunque aún se escribe

$$\vec{B} = \mu(H) \vec{H},$$

donde μ depende del valor de \vec{H} y de la historia del material (histéresis).