CAPÍTULO I
Campos escalares y vectoriales

Fundamento teórico

I.- Operaciones básicas con vectores

Ia.- Módulo de un vector

El módulo de un vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ viene dado por

$$|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ ,$$

donde v_x, v_y, v_z son las componentes cartesianas del vector (a lo largo de los ejes *X*, *Y*, *Z*). Si $v = 1$ el vector es unitario.

Ib.-Suma de vectores

La suma de dos vectores $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ y $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ es un vector de componentes $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z} + v_{2z})$. En la figura *1-1* se puede observar que el vector suma se obtiene geométricamente colocando el origen del segundo vector en el extremo del primero; la suma es el vector cuyo origen es el origen del primero y su extremo es el extremo del segundo. En virtud de la propiedad asociativa la suma de *n* vectores $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n$ es el vector de componentes $(v_{1x} + v_{2x} + \cdots + v_{nx}, v_{1y} + v_{2y} + \cdots + v_{ny}, v_{1z} + v_{2z} + \cdots + v_{nz})$. En la figura *1-2* se muestra la construcción geométrica del vector suma. En el caso particular de que el extremo del último vector coincida con el origen del primero, la suma es el vector cero.

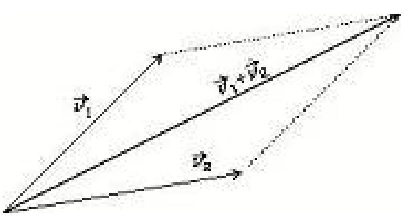

Figura 1-1

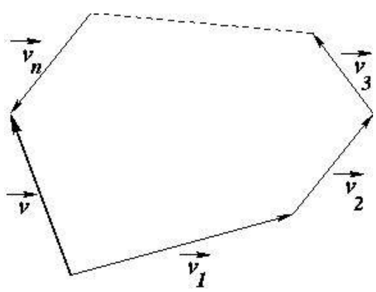

Figura 1-2

Ic.-Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ y $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ es un escalar de valor

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z} = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por los dos vectores.

Id.- Proyección

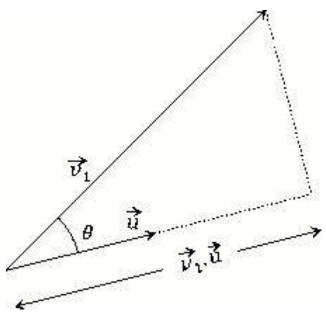

Figura 0-3

Si $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ es un vector cualquiera y $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ es un vector unitario, la proyección de $\vec{v}_1$ en la dirección determinada por $\vec{u}$ viene dada por su producto escalar:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = v_{1x} u_x + v_{1y} u_y + v_{1z} u_z = v_1 \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por los dos vectores (figura *1-3).*

Si se toma como $\vec{u}$ el vector $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, o $\vec{k} = (0,0,1)$, al coseno del ángulo formado con cada uno de los ejes se le denomina <u>*coseno director*</u>:

$$\cos\alpha = \frac{v_{1x}}{v_1} \quad \cos\beta = \frac{v_{1y}}{v_1} \quad \cos\gamma = \frac{v_{1z}}{v_1}$$

Ie.-Producto vectorial de dos vectores

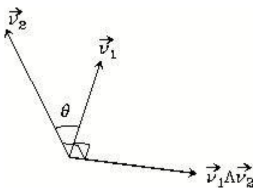

Figura 0-4

El producto vectorial de dos vectores $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ y $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ es el vector

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} =$$

$$= (v_{1y} v_{2z} - v_{2y} v_{1z})\vec{i} + (v_{1z} v_{2x} - v_{1x} v_{2z})\vec{j} + (v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x})\vec{k}$$

cuyo módulo vale

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = v_1 v_2 sin\theta,$$

siendo θ es el ángulo formado por los dos vectores. El vector $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, y su sentido viene determinado por la regla de la mano derecha o sacacorchos (figura *1-4*).

II.- Coordenadas rectangulares y polares

IIa.-Coordenadas rectangulares

En un espacio bidimensional (un plano), cuyos ejes denominamos *X* e *Y*, el vector de posición de un punto viene dado por

$$\vec{r} = (x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\ ,$$

donde x e y son las coordenadas rectangulares (figura *1-5*).

IIb.-Coordenadas polares

El vector de posición de un punto puede venir también especificado por las coordenadas polares (r, θ), de manera que su relación con las rectangulares (figura *1-5*) viene dada por

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{y}{x}$$

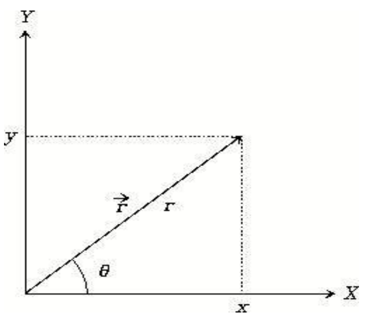

Figura 1-5

III.- Coordenadas cartesianas

IIIa.-Vector posición de un punto

En coordenadas cartesianas viene dado por (figura *1-6*

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

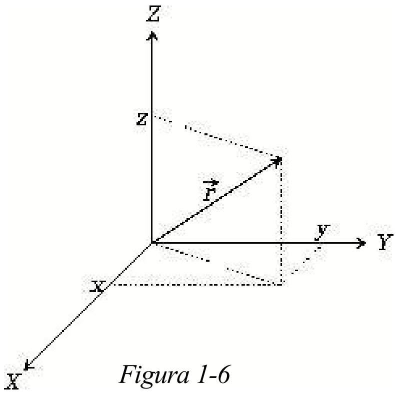

Figura 1-6

IIIb.-Curva C en el espacio

Es una aplicación $C : t \in R \Rightarrow \vec{r}(t) \in R^3$, es decir,

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

IIIc.-Vector desplazamiento infinitesimal

Es el vector diferencial tangente a una curva C en cada uno de sus puntos (figura *1-7*):

$$d\vec{l}\,(t) \equiv d\vec{r}\,(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)dt$$

$$= \left(\frac{dx(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{k}\right)dt$$

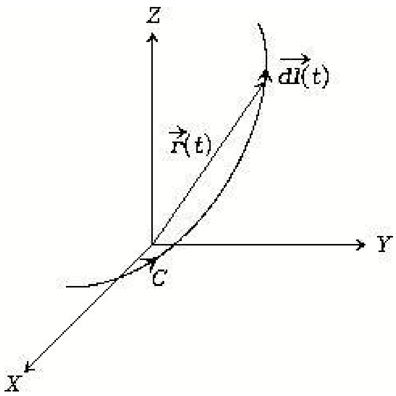

Figura 1-7

IIId.-Elemento de superficie

Un elemento de superficie (figura *1-8*) contenido en un plano paralelo al plano *XY* viene dado por

$$d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{k}$$

Si es paralelo al plano *XZ*,

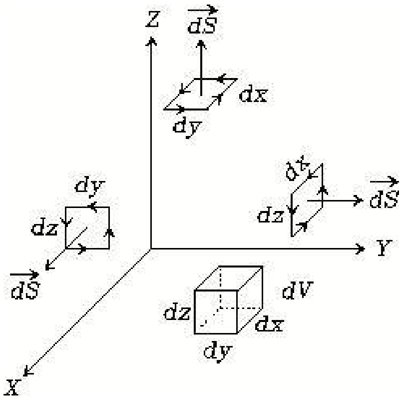

Figura 1-8

$$d\vec{S} = dx\,dz\,\vec{j}\ ;$$

y si es paralelo al plano *YZ*,.

$$d\vec{S} = dy\,dz\,\vec{i}$$

IIIe.-Elemento de volumen

Un elemento de volumen (figura *1-8*)es un escalar que viene dado por

$$dV = dx\,dy\,dz$$

IV.- Coordenadas esféricas

IVa.-Vector posición de un punto

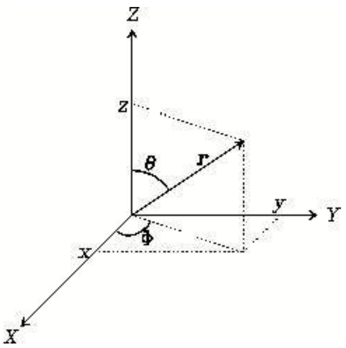

Figura 1-9

En coordenadas esféricas (figura *1-9*)

$$\vec{r} = (r, \theta, \phi)\ ,$$

donde $r = |\vec{r}\,|$, y los ángulos θ y ϕ se indican en la figura *1-9*. La relación entre las coordenadas esféricas y las cartesianas es

$$x = r\ sin\theta\ \cos\phi$$
$$y = r\ sin\theta\ sin\phi$$
$$z = r\ \cos\theta$$

IVb.-Elemento de superficie

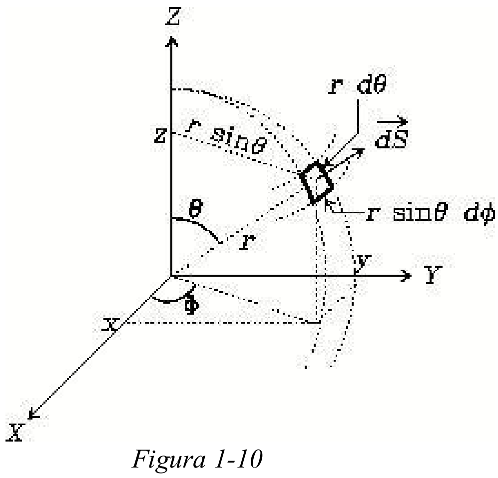

Figura 1-10

Un elemento de superficie contenido en una superficie esférica de radio *r* tiene la expresión (ver figura *1-10*

$$d\vec{S} = r^2\ sin\theta\ \ d\theta\ \ d\phi\ \ \vec{u}_r$$

siendo

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

el vector unitario con dirección radial y sentido saliente.
El área total de una superficie esférica de radio *r* vale $S = 4\,\pi\,r^2$.

IVc.-Elemento de volumen

Un elemento de volumen viene dado por

$$dV = r^2\ sin\theta\ dr\ d\theta\ d\phi$$

El volumen de una esfera de radio r vale

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

V.- Coordenadas cilíndricas

Va.-Vector posición de un punto

Las coordenadas cilíndricas

$$\vec{r} = (\rho, \phi, z)\ ;$$

se indican en la figura *1-11*. La relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas es

$$x = \rho \cos\phi$$
$$y = \rho\ sin\phi$$
$$z = z$$

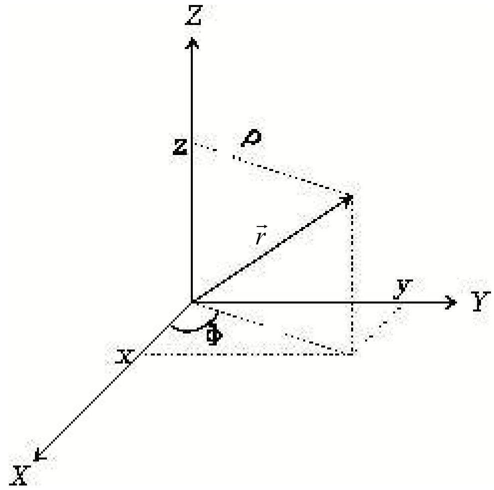

Figura 1-11

Vb.-Elemento de superficie

Un elemento de superficie contenido en una superficie cilíndrica de radio ρ (figura *1-12*) tiene la expresión

$$d\vec{S} = \rho\ dz\ d\phi\ \vec{u}_\rho$$

siendo $\vec{u}_\rho$ el vector unitario perpendicular al elemento de superficie.
El área total de una superficie cilíndrica de altura h es $S = 2\pi\rho h$.

Vc.-Elemento de volumen

Un elemento de volumen viene dado por (figura *1-12*)

$$dV = \rho\ d\rho\ dz\ d\phi$$

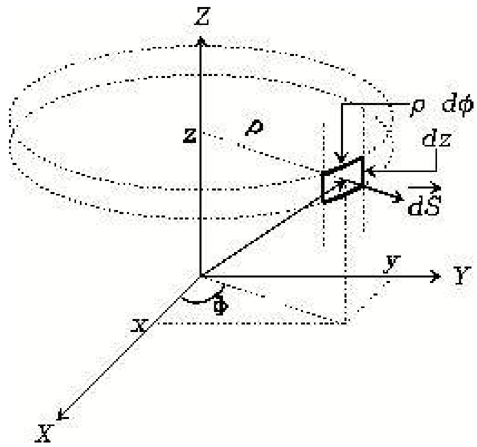

Figura 1-12

VI.- Campos

VIa.- Superficies equiescalares o de nivel

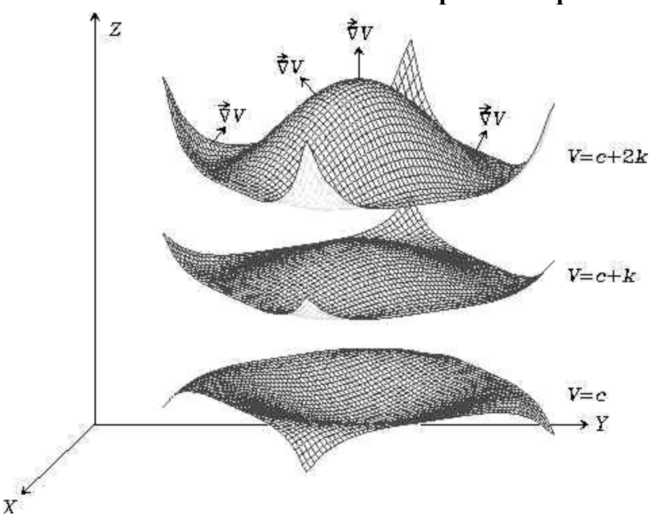

Figura 1-13

Dado un campo escalar *V(x,y,z)*, las superficies equiescalares o de nivel son aquéllas en las que el campo toma un valor determinado. Responden a la ecuación

$$V(x,y,z)=K\ ,$$

donde a la constante (*K*) se le suelen dar valores en progresión aritmética: *c*, *c+k*, *c+2k*, etc. (figura *1-13*), con el fin de representar gráficamente el campo.

VIb.- Gradiente de un campo escalar

El gradiente de un campo escalar *V(x,y,z)* es un vector (campo vectorial) de componentes cartesianas

$$\mathrm{grad}\,V=\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\ .$$

El vector $\vec{\nabla}V$ es perpendicular en todo punto a las superficies equiescalares, tal y como se representa esquemáticamente en la figura *1-13*.

Si V es un campo escalar que, expresado en coordenadas esféricas, sólo depende de la coordenada radial r, $V(r)$, entonces su gradiente es

$$\mathrm{grad}\,V=\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r\ .$$

Si V es un campo escalar que, expresado en coordenadas cilíndricas, sólo depende de la coordenada radial ρ, $V(\rho)$, entonces su gradiente es

$$\mathrm{grad}\,V=\vec{\nabla}V=\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{u}_\rho\ .$$

VIc.- Derivada direccional

La derivada de un campo escalar *V(x,y,z)* a lo largo de la dirección determinada por el vector unitario $\vec{u}_s$ viene dada por

$$\frac{dV}{ds}=\mathrm{grad}\,V\cdot\vec{u}_s$$

VId.- Líneas de campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, las líneas de campo son aquellas curvas tales que el vector desplazamiento diferencial $d\vec{l}$ es paralelo a $\vec{F}(\vec{r})$ en todos sus puntos:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

VIe.- Flujo de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, su flujo a través de una superficie abierta S es el escalar

$$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_S F\, dS \cos\theta \ ,$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{F}$ y $d\vec{S}$.
Si S es una superficie cerrada, el flujo se expresa

$$\Phi = \oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_S F\, dS \cos\theta \,.$$

VIf.- Divergencia de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, su divergencia (flujo por unidad de volumen) es un escalar definido en cada punto del campo, y cuya expresión en coordenadas cartesianas es

$$div\, \vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \,.$$

Un campo $\vec{F}(\vec{r})$ se dice que es *solenoidal* si $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ en todos los puntos del campo.

VIg.- Circulación de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, su circulación a lo largo de una curva abierta C entre dos puntos de la misma A y B es el escalar

$$C = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_C F\, dl \cos\theta \,,$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{F}$ y $d\vec{l}$, y la integral se extiende entre A y B.
Si C es una curva cerrada (los puntos A y B coinciden), la circulación se expresa

$$C = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_C F\, dl \cos\theta \,.$$

Si $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo de fuerzas que actúa sobre un cuerpo, y C es la trayectoria de dicho cuerpo, a la circulación se la denomina *Trabajo*.

VIh.- Rotacional de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, su rotacional (circulación por unidad de superficie) es un vector definido en cada punto del campo, y cuya expresión en coordenadas cartesianas es

$$rot\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

VIi.- Campo vectorial conservativo

Un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si su circulación entre dos puntos *A* y *B* no depende de la curva *C* seguida. Condiciones equivalentes:

1. $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall C$.
2. Es un campo irrotacional: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ en todos los puntos del campo.
3. Existe un campo escalar *V* del cual $\vec{F}$ puede ser derivado: $\exists V \,/\, \vec{F} = \pm\vec{\nabla}V$.

Si $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo, y *V* es el campo escalar del que deriva, $\vec{F} = \pm\vec{\nabla}V$, entonces la circulación de $\vec{F}(\vec{r})$ entre dos puntos *A* y *B* se puede calcular fácilmente así:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \pm\int_A^B \vec{\nabla}V\cdot d\vec{l} = \pm\int_A^B dV = \pm\left(V_B - V_A\right)$$

VIj.- Teorema de la divergencia o de Gauss

Dados un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, una superficie cerrada *S* y *V* el volumen por ella delimitado,

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{F}\; dV\,.$$

VIk.- Teorema de Stokes

Dados un campo vectorial $\vec{F}(\vec{r})$, una curva cerrada *C* y *S* una superficie abierta cualquiera delimitada por *C*,

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S rot\,\vec{F}\cdot d\vec{S}\,.$$