

CAPÍTULO III Electrostática

Fundamento teórico

I.- Ley de Coulomb

Ia.- Ley de Coulomb

La fuerza electrostática \vec{F}_{12} que una carga puntual q_1 con vector posición \vec{r}_1 ejerce sobre una carga puntual q_2 con vector posición \vec{r}_2 es

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Ib.- Acción y reacción

La fuerza electrostática \vec{F}_{21} que la carga q_2 ejerce sobre q_1 es igual en módulo a \vec{F}_{12} pero tiene sentido contrario (figura 3-1)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Ic.- Principio de Superposición

La fuerza que un sistema de cargas puntuales $\{q_1', q_2', \dots, q_N'\}$, con vectores posición $\{\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N'\}$, ejerce sobre una carga q_0 con vector posición \vec{r}_0 es la suma vectorial de las fuerzas individuales (figura 3-2):

$$\vec{F}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{i0} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i' q_0}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i'|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i')$$

II.- Campo eléctrico

IIa.- Relación fuerza-campo eléctrico

Una carga q_0 , con vector posición \vec{r}_0 , experimenta una fuerza eléctrica \vec{F}_0 debida a otras cargas, igual a

$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}(\vec{r}_0),$$

donde $\vec{E}(\vec{r}_0)$ es la intensidad de campo eléctrico (o sencillamente el campo eléctrico) en el punto ocupado por la carga q_0 .

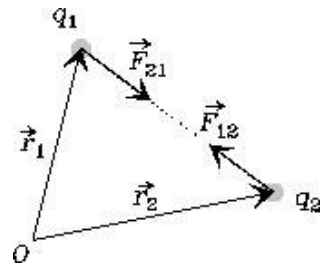


Figura 3-1

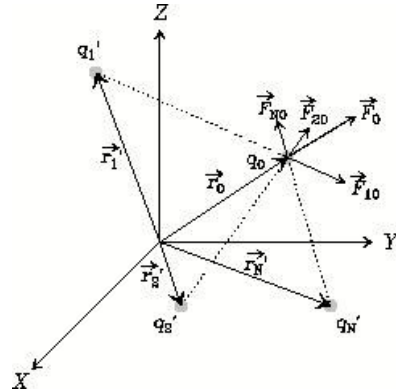


Figura 3-2

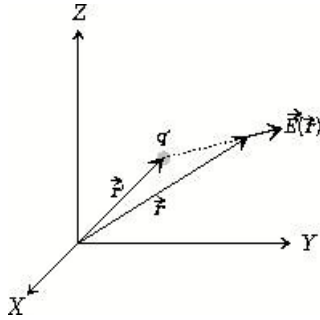
Iib.- Campo eléctrico creado por una carga puntual

Figura 3-3

Una carga puntual q' con vector posición \vec{r}' (figura 3-3) genera un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto de vector posición \vec{r} de valor

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Iic.- Campo eléctrico creado por un sistema de cargas puntuales

Un sistema de cargas puntuales $\{q_1', q_2', \dots, q_N'\}$, con vectores posición $\{\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N'\}$, generan un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ en el punto de vector posición \vec{r} que es la suma vectorial de los campos individuales (figura 3-4):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i')$$

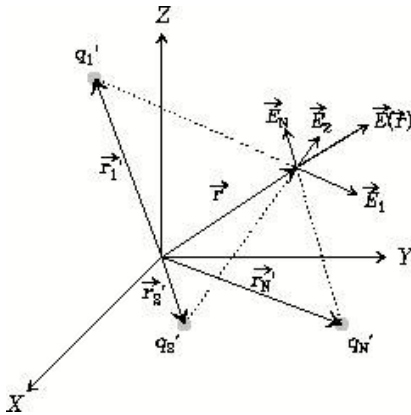


Figura 3-4

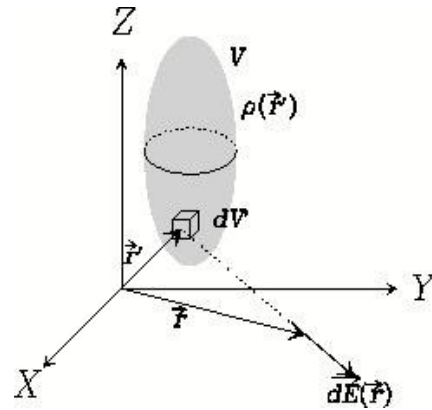


Figura 3-5

IId.- Campo eléctrico creado por una distribución volúmica de carga

Dada una distribución de carga de densidad volúmica $\rho(\vec{r}')$ (figura 3-5), el campo $\vec{E}(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el campo generado por cada elemento de volumen dV' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V d\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV'$$

IIe.- Campo eléctrico creado por una distribución superficial de carga

Dada una distribución de carga de densidad superficial $\sigma(\vec{r}')$ (figura 3-6), el campo $\vec{E}(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el campo generado por cada elemento de superficie dS' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S d\vec{E}(\vec{r}) = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dS'$$

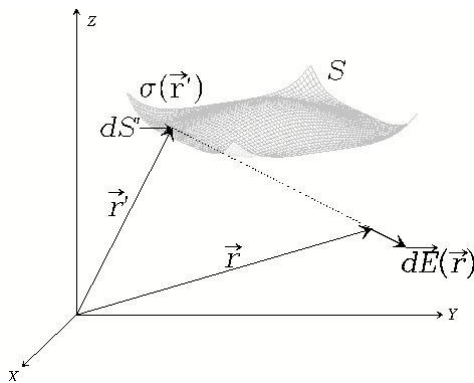


Figura 3-6

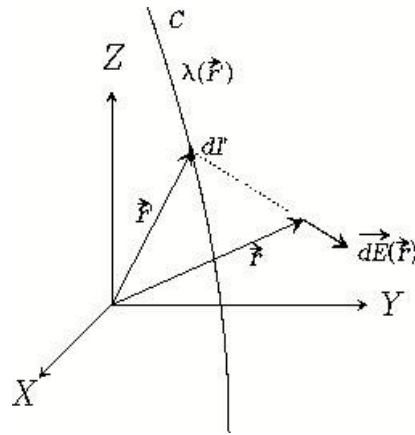


Figura 3-7

IIIf.- Campo eléctrico creado por una distribución lineal de carga

Dada una distribución de carga de densidad lineal $\lambda(\vec{r}')$ (figura 3-7), el campo $\vec{E}(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el campo generado por cada elemento de longitud de la curva dl' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_C d\vec{E}(\vec{r}) = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dl'$$

III.- Potencial eléctrico

IIIa.- Relación campo eléctrico – potencial eléctrico

Dado que el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ es conservativo ($\text{rot } \vec{E} = 0$ en todos los puntos del espacio), deriva de un campo escalar, llamado potencial eléctrico (V), a partir de

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

IIIb.- Potencial eléctrico creado por una carga puntual

Una carga puntual q' con vector posición \vec{r}' (figura 3-8) genera un potencial eléctrico $V(\vec{r})$ en el punto de vector posición \vec{r} de valor

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

donde se ha tomado el origen de potenciales en el infinito.

IIIc.- Potencial eléctrico creado por un sistema de cargas puntuales

Un sistema de cargas puntuales $\{q_1', q_2', \dots, q_N'\}$, con vectores posición $\{\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N'\}$ (figura 3-9), generan un potencial eléctrico $V(\vec{r})$ en el punto de vector posición \vec{r} que es la suma de los potenciales individuales:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|},$$

donde se ha tomado el origen de potenciales en el infinito.

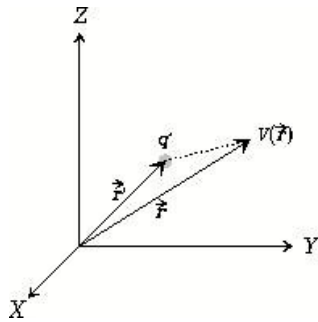


Figura 3-8

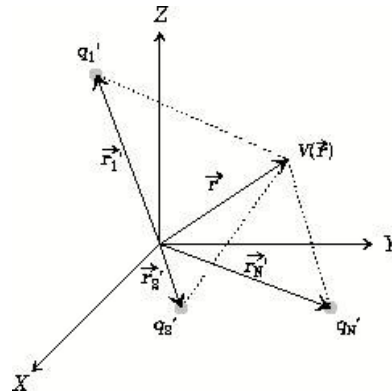


Figura 3-9

IIId.- Potencial eléctrico creado por una distribución volúmica de carga

Dada una distribución de carga de densidad volúmica $\rho(\vec{r}')$ (figura 3-10), el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el potencial generado por cada elemento de volumen dV' :

$$V(\vec{r}) = \int_V dV(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

donde se ha tomado el origen de potenciales en el infinito.

IIIe.- Potencial eléctrico creado por una distribución superficial de carga

Dada una distribución de carga de densidad superficial $\sigma(\vec{r}')$ (figura 3-11), el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el potencial generado por cada elemento de superficie dS' :

$$V(\vec{r}) = \int_S dV(\vec{r}) = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS',$$

donde el origen de potenciales está en el infinito.

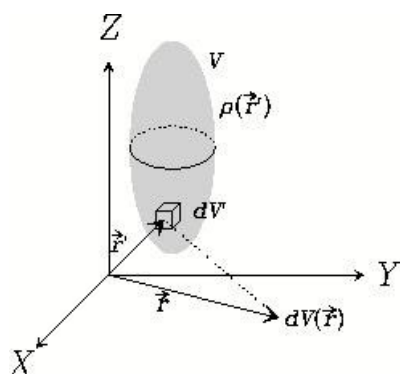


Figura 3-10

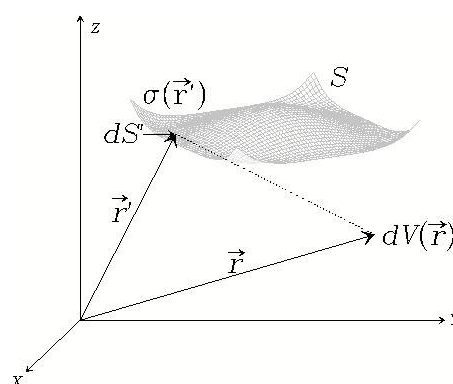


Figura 3-11.

IIIe.- Potencial eléctrico creado por una distribución lineal de carga

Dada una distribución de carga de densidad lineal $\lambda(\vec{r}')$ (figura 3-12), el potencial eléctrico $V(\vec{r})$ generado en el punto de vector posición \vec{r} se determina integrando el potencial generado por cada elemento de longitud de la curva dl' :

$$V(\vec{r}) = \int_C dV(\vec{r}) = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl',$$

donde se ha tomado el origen de potenciales en el infinito.

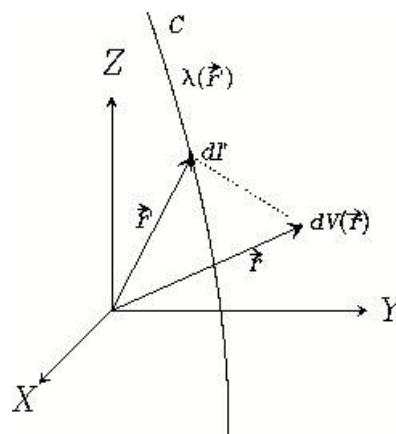


Figura 3-12.

IV.- Trabajo y energía

IVa.- Relación potencial eléctrico – energía potencial:

Dada una carga q_0 , situada en el punto de vector posición \vec{r}_0 donde el potencial eléctrico debido a otras cargas es $V(\vec{r}_0)$, su energía potencial eléctrica $U(\vec{r}_0)$ y la fuerza eléctrica \vec{F}_0 sobre

ella vienen dadas por

$$U(\vec{r}_0) = q_0 V(\vec{r}_0) \quad \vec{F}_0 = -\text{gra } dU = -\vec{\nabla} U$$

IVb.- Trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre una carga

Dada una carga q_0 que se mueve bajo la acción de una fuerza eléctrica \vec{F}_0 entre los puntos A y B , el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_0 \cdot d\vec{l} = -[U(B) - U(A)] = -q_0[V(B) - V(A)],$$

donde $U(B)$ y $U(A)$ representan la energía potencial eléctrica de q_0 en los puntos B y A respectivamente, y $V(B)$ y $V(A)$ representan los potenciales eléctricos en los puntos B y A respectivamente.

IVc.- Conservación de la energía de una carga puntual

Dada una carga q_0 , únicamente sujeta a fuerzas eléctricas, su energía mecánica E_m se conserva: si A y B son dos puntos cualesquiera de su trayectoria,

$$E_m(A) = E_m(B) \quad E_c(A) + U(A) = E_c(B) + U(B)$$

(Véase también Capítulo II, Ecuaciones, sección V.)

IVd.- Energía propia o electrostática de un sistema de cargas puntuales

Dado un sistema de N cargas puntuales $\{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, con vectores posición $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\}$ definiendo la configuración A , su energía propia o electrostática $U(A)$ viene dada por

$$U(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

donde $V(\vec{r}_i)$ es el potencial eléctrico en el punto ocupado por q_i debido al resto de cargas del sistema. La energía propia tiene el significado de energía potencial de interacción entre las cargas que constituyen el sistema, debida a las fuerzas eléctricas que se ejercen mutuamente.

IVe.- Energía propia o electrostática de una distribución continua de carga

Si se trata de una distribución continua de carga, la energía propia vale

$$U = \frac{1}{2} \int V dq = \frac{1}{2} \int_{\text{espacio}} \vec{E} \cdot \vec{D} dv$$

donde la última integral se extiende a todo el espacio, y \vec{D} es el vector desplazamiento eléctrico (véase el Capítulo IV), que en ausencia de dieléctricos vale $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$.

IVf.- Trabajo necesario para generar un sistema

Dado un sistema de cargas o una distribución continua de carga con energía propia $U(A)$, el trabajo exterior necesario para generar esta configuración A venciendo las fuerzas eléctricas, es decir, para traer las cargas desde posiciones muy alejadas hasta las dadas por A , vale

$$W_{\infty A} = U(A).$$

Si $W_{\infty A} < 0$ no es necesario realizar trabajo exterior.

IVg.- Trabajo realizado por las fuerzas eléctricas en la evolución de un sistema

Dado un sistema de cargas o una distribución continua de carga que evoluciona desde una configuración A hasta una configuración B , el trabajo realizado por las fuerzas eléctricas que se ejercen mutuamente vale

$$W_{AB} = -[U(B) - U(A)]$$

V.- Ley de Gauss

Va.- Ley de Gauss

Dada una superficie cerrada (gaussiana) S cualquiera, que delimita un volumen V (figura 3-13), el flujo de campo eléctrico a través de S viene dado por

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0},$$

donde q_{enc} es la carga neta total contenida en V (es decir, encerrada o interior a S).

La ley de Gauss es muy útil para determinar el campo \vec{E} creado por distribuciones de carga con alta simetría.

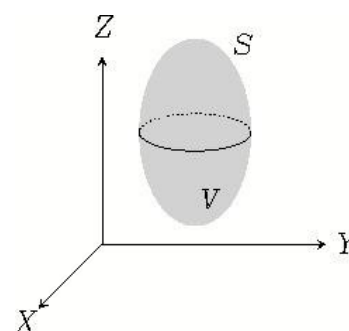


Figura 3-13

Vb.- Simetría esférica

En el caso de distribuciones de carga con simetría esférica (ejemplo simple en la figura 3-14), el campo \vec{E} es radial. Tomándose como superficie gaussiana una superficie esférica de radio r , el primer miembro de la ley de Gauss vale

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2,$$

donde E es el módulo del campo eléctrico a una distancia r del centro de simetría de la distribución.

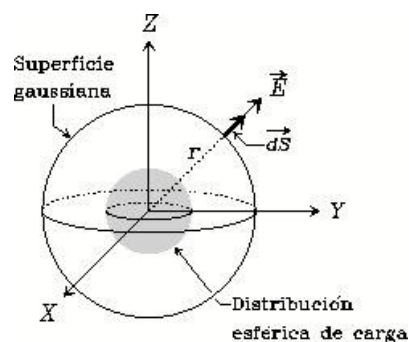


Figura 3-14

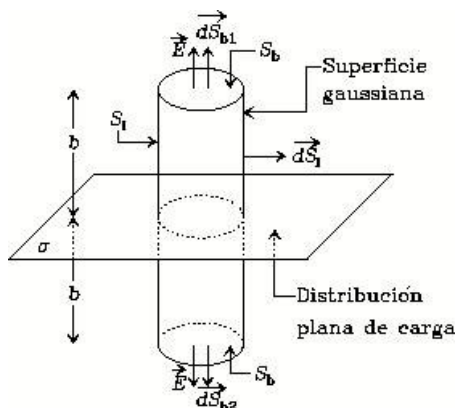


Figura 3-15

Vc.- Simetría plana

En el caso de distribuciones de carga con simetría plana (ejemplo simple en la figura 3-15), el campo \vec{E} es perpendicular al plano. Tomándose como superficie gaussiana un cilindro recto de base S_b y altura $2b$, el primer miembro de la ley de Gauss vale

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E S_b,$$

donde E es el módulo del campo eléctrico a una distancia b del plano de carga.

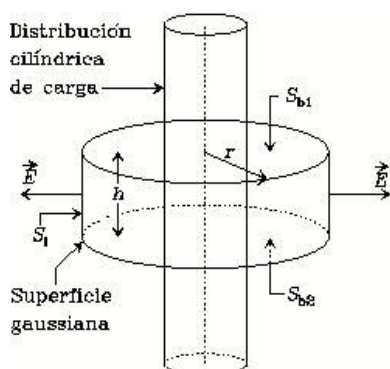


Figura 3-16

Vd.- Simetría cilíndrica

En el caso de distribuciones de carga con simetría cilíndrica (ejemplo simple en la figura 3-16), el campo \vec{E} es perpendicular al eje de simetría. Tomándose como superficie gaussiana un cilindro recto de radio r y altura h , el primer miembro de la ley de Gauss vale

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r h,$$

donde E es el módulo del campo eléctrico a una distancia r del eje de simetría.

VI.- Conductores en equilibrio**VIa.- Campo eléctrico nulo en el interior y volumen equipotencial**

En el seno de todo conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo (figura 3-17); por tanto constituye un volumen equipotencial:

$$E_{\text{int}} = 0 \Rightarrow V \text{ uniforme}$$

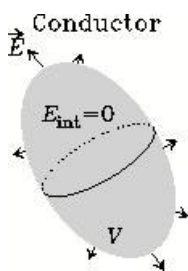


Figura 3-17

VIb.- Distribución de la carga eléctrica

Si un conductor tiene carga neta, tanto si carece de cavidad como si tiene una cavidad sin cargas, la carga se distribuye en la superficie exterior.

Vlc.- Campo eléctrico en las proximidades de un conductor

El campo \vec{E} en las proximidades de un conductor es perpendicular a la superficie y de valor

$$E_{prox} = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

donde σ es la densidad superficial de carga eléctrica en el punto correspondiente de la superficie.

Vld.- Campo eléctrico en una cavidad sin carga

Si la cavidad de un conductor no tiene cargas, el campo \vec{E}_{cav} en la cavidad es nulo.

Vle.- Campo eléctrico en una cavidad con carga

Si la cavidad de un conductor tiene cargas, el campo \vec{E}_{cav} en la cavidad está restringido a ella, apareciendo una densidad superficial de carga en la superficie de la cavidad (figura 3-18).

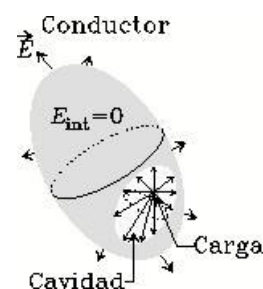


Figura 3-18

Vlf.- Conexión de conductores

Cuando dos conductores, con cargas iniciales q_1^{ini} y q_2^{ini} , se conectan (figura 3-19) hay una transferencia de carga entre ellos de forma que en la situación final de equilibrio los potenciales eléctricos V_1 y V_2 son iguales, y la suma de las cargas finales $q_1 + q_2$ es igual a la suma de las cargas iniciales (conservación de la carga):

$$V_1 = V_2$$

$$q_1 + q_2 = q_1^{ini} + q_2^{ini}$$

Vlf.- Conexión a tierra

Cuando un conductor se conecta a tierra (figura 3-19), hay una transferencia de carga entre el conductor y la tierra de forma que, en la situación final, el potencial eléctrico del conductor es nulo:

$$V = 0$$

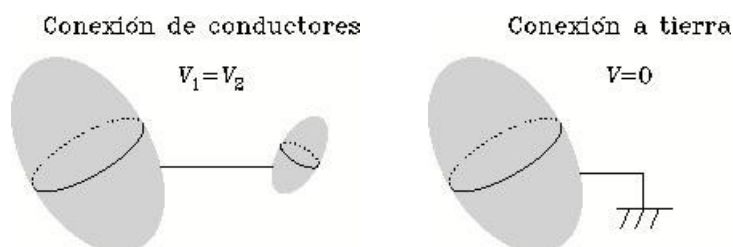


Figura 3-19

VII.- Condensadores

VIIa.- Condensadores o capacitores y capacidad

Un condensador o capacitor es un sistema de dos conductores (armaduras), no conectados, que tienen cargas iguales en valor absoluto y de signo contrario, Q y $-Q$. Si $\Delta V = V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial entre ambas armaduras (V_1 es el potencial de la armadura cargada positivamente y V_2 es el potencial de la armadura cargada negativamente), entonces

$$Q = C \Delta V$$

donde C es por definición la capacidad del condensador, sólo dependiente de la geometría.

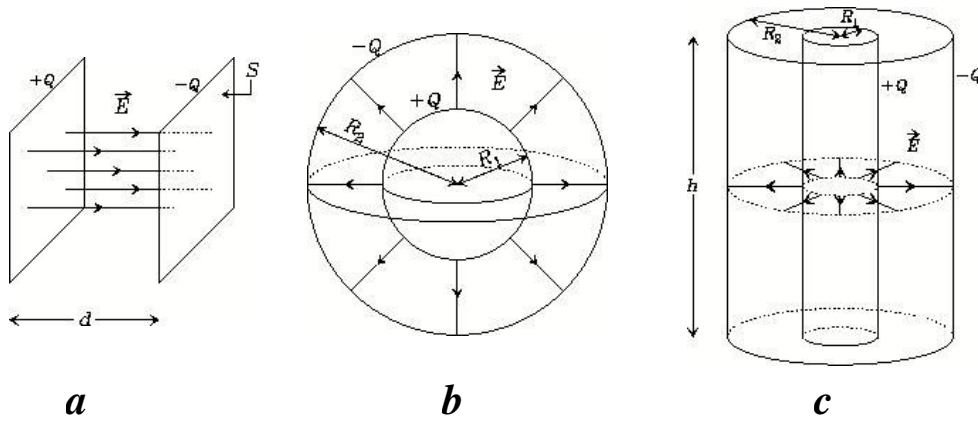


Figura 3-20

VIIb.- Condensador plano

Las armaduras son dos placas planas, de área S cada una, y separadas una distancia d (figura 3-20-a). La capacidad vale

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

VIIc.- Condensador esférico

Las armaduras son dos superficies conductoras concéntricas, de radios R_1 y R_2 (figura 3-20-b). La capacidad vale

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

VIII.d.- Condensador cilíndrico

las armaduras son dos superficies conductoras cilíndricas, de radios R_1 y R_2 y altura h (figura 3-20-c). La capacidad vale

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)},$$

y la capacidad por unidad de longitud

$$\frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$