CAPÍTULO IV
Dieléctricos

Fundamento teórico

I.- El dipolo

Ia.- Momento dipolar

Un sistema formado por dos cargas iguales en módulo y de signo opuesto, $+q$ y $-q$, con vectores posición $\vec{r}_+$ y $\vec{r}_-$ respectivamente, forman un dipolo (figura *4-1*). Si $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ es el vector con punto de aplicación en $-q$ y extremo en $+q$, el momento dipolar del dipolo es el vector

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

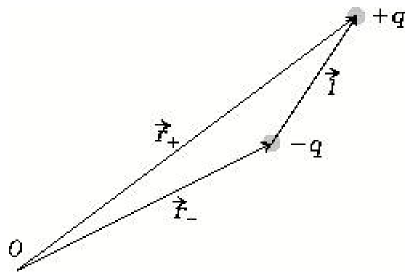

Figura 4-1

Ib.- Campo eléctrico generado por un dipolo

Dado un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ situado en el punto de vector posición $\vec{r}\,'$, el campo eléctrico que genera en el punto de vector posición $\vec{r}$ viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right],$$

y el potencial eléctrico viene dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}.$$

En la figura *4-2* se muestran esquemáticamente las líneas de campo de un dipolo cuyo momento dipolar está dirigido tal y como se indica.

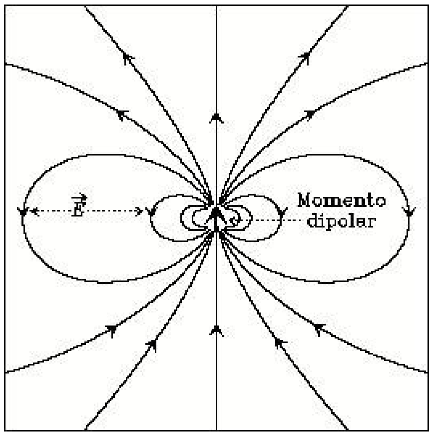

Figura 4-2

Ic.- Par de fuerzas sobre un dipolo en el seno de un campo eléctrico externo

Dado un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ sometido a un campo eléctrico externo $\vec{E}$, el par de fuerzas $\vec{M}$ que experimenta el dipolo viene dado por

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E},$$

y tiende a alinear el momento dipolar $\vec{p}$ en la dirección y sentido de $\vec{E}$ (figura *4-3*). Una vez alineados $\vec{p}$

y $\vec{E}$, $\vec{M} = 0$.

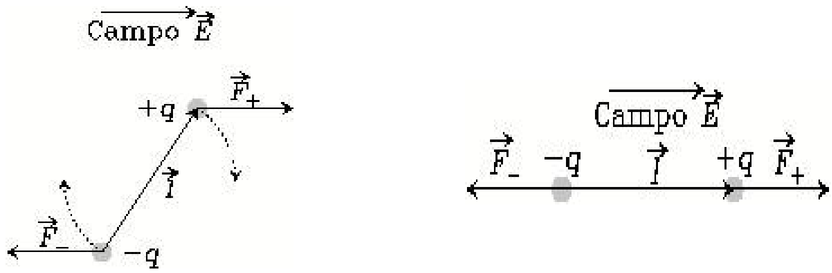

Figura 4-3

Id.- Fuerza neta sobre un dipolo en el seno de un campo eléctrico externo

Dado un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ sometido a un campo eléctrico externo $\vec{E}$, la fuerza neta $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ que experimenta el dipolo viene dada por

$$F_x = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \qquad F_y = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \qquad F_z = \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Ie.- Energía potencial de un dipolo en el seno de un campo eléctrico externo

Dado un dipolo de momento dipolar $\vec{p}$ sometido a un campo eléctrico externo $\vec{E}$, la energía potencial del dipolo viene dada por

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

II.- Dieléctricos lineales

IIa.- El vector polarización

En un dieléctrico, dado un elemento de volumen ΔV con vector posición $\vec{r}$, en el que tenemos *N* dipolos con momentos dipolares $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_N\}$, el vector polarización $\vec{P}(\vec{r})$ en ese punto es

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} \quad \text{con} \quad \Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \ .$$

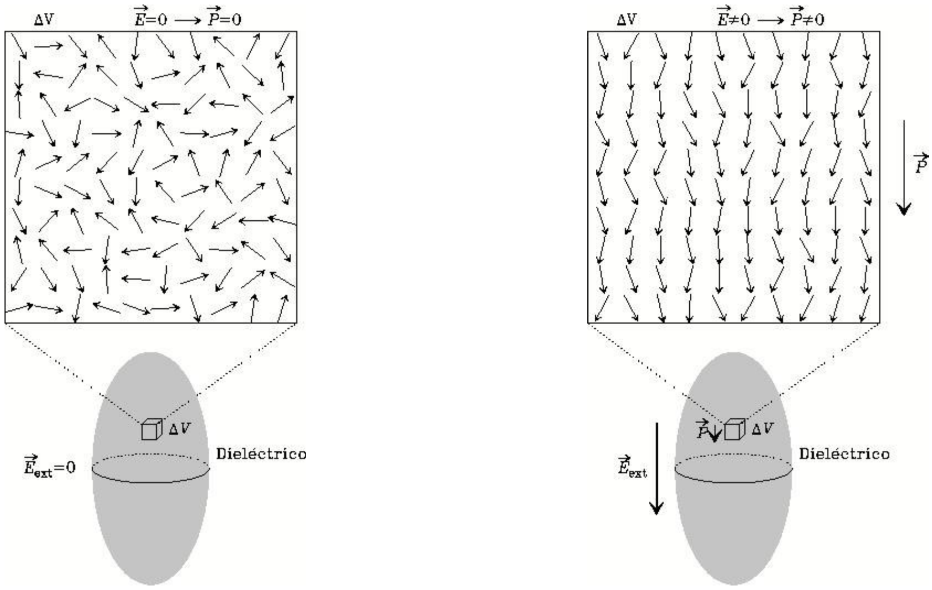

Figura 4-4

1. Si el campo eléctrico $\vec{E}_{ext}$ generado en ΔV por las cargas libres exteriores al dieléctrico (incluyendo las de los conductores) es nulo, los dipolos están orientados al azar, y

$$\vec{E}_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{P}(\vec{r}) = 0$$

2. Si el campo eléctrico $\vec{E}_{ext}$ generado en ΔV por las cargas libres exteriores al dieléctrico (incluyendo las de los conductores) no es nulo, los dipolos están en mayor o menor grado alineados con $\vec{E}_{ext}$, y

$$\vec{E}_{ext} \neq 0 \Rightarrow \Delta\vec{p} \neq 0 \Rightarrow \vec{P}(\vec{r}) \neq 0 \quad \vec{P}(\vec{r}) \| \vec{E}_{ext}$$

según se ve en la figura *4-4*.

IIb.-Relación entre $\vec{P}$ y $\vec{E}$

Dado un elemento de volumen ΔV de un dieléctrico donde el campo eléctrico neto (debido tanto a las cargas libres como a las de polarización) es $\vec{E}$, el vector polarización vale

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

donde χ_E es la susceptibilidad eléctrica del dieléctrico, y ε_r es la constante dieléctrica o permitividad eléctrica del dieléctrico.

IIc.-Campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el seno de un dieléctrico

Dado un elemento de volumen ΔV de un dieléctrico donde las cargas libres externas generan un campo $\vec{E}_{ext}$ y donde el vector polarización vale $\vec{P}$, el campo neto $\vec{E}$ que incluye tanto el efecto de las cargas libres como el de las cargas de polarización tiene por valor

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_{ext} - \chi_E \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_{ext}}{1+\chi_E} = \frac{\vec{E}_{ext}}{\varepsilon_r}$$

IId.-Densidad superficial de carga de polarización

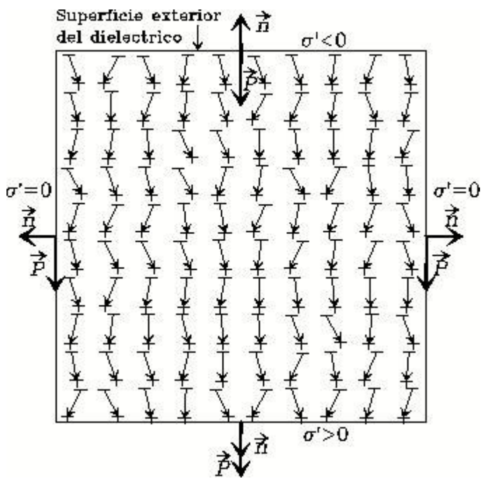

Figura 4-5

En un elemento de superficie ΔS cualquiera de la superficie de un dieléctrico, donde el vector polarización vale $\vec{P}$, la densidad superficial de carga de polarización σ' en ese elemento viene dada por:

$$\sigma' = \frac{\Delta q'}{\Delta S} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario perpendicular a ΔS y saliente del dieléctrico (figura *4-5*).

IIe.-Densidad volúmica de carga de polarización

Dado un elemento de volumen ΔV de un dieléctrico donde el vector polarización vale $\vec{P}$, la densidad volúmica de carga de polarización ρ' en ese elemento viene dada por:

$$\rho' = \frac{\Delta q'}{\Delta V} = -\vec{\nabla}\vec{P}$$

III.- El vector desplazamiento eléctrico

IIIa.- Relación entre el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ y el vector $\vec{E}$:

Dado un elemento de volumen ΔV de un dieléctrico donde el vector polarización vale $\vec{P}$, y el campo eléctrico neto (que incluye tanto el efecto de las cargas libres como el de las cargas de polarización) vale $\vec{E}$, se define el vector desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ como

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext},$$

es decir, es ε_0 veces el campo eléctrico generado sólo por las cargas eléctricas libres. Dada la relación existente entre $\vec{E}$ y $\vec{E}_{ext}$ (*IIc*), tendremos

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 (1+\chi_E)},$$

donde ε es la constante dieléctrica absoluta o permitividad eléctrica absoluta del dieléctrico.

IIIb.- Ley de Gauss para el vector $\vec{D}$

Dada una superficie cerrada (gaussiana) *S* cualquiera, que delimita un volumen *V*, el flujo del vector desplazamiento eléctrico a través de *S* viene dado por

$$\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{enc}^{libre} ,$$

donde q_{enc}^{libre} es la carga libre (es decir, excluida la de polarización) neta total contenida en V (es decir, encerrada o interior a S).

La ley de Gauss es muy útil para determinar el campo $\vec{D}$ creado por distribuciones de carga con alta simetría (se utilizan los mismos argumentos de simetría que los usados para $\vec{E}$ en el Capítulo III).

IV.- Dieléctricos en condensadores

IVa.- Proceso de cálculo cuando la carga libre en armaduras es conocida

En tal caso, que sucede por ejemplo cuando el generador se ha desconectado antes de introducir el dieléctrico, el proceso de cálculo de las cantidades $\vec{D}$, $\vec{E}$, ΔV, $\vec{P}$, σ' es:

a) Utilizar $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{enc}^{libre}$ para el cálculo de $\vec{D}$.

b) Utilizar $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ para el cálculo de $\vec{E}$.

c) Utilizar $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para el cálculo de ΔV.

d) Utilizar $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\vec{E}$ para el cálculo de $\vec{P}$.

e) Utilizar $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$ para el cálculo de σ'.

IVb.- Proceso de cálculo cuando la diferencia de potencial entre armaduras es conocida

En tal caso, que sucede por ejemplo cuando el generador se mantiene conectado al introducir el dieléctrico, el proceso de cálculo de las cantidades $\vec{D}$, $\vec{E}$, ΔV, $\vec{P}$, σ' es:

a) Utilizar $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para relacionar ΔV y $\vec{E}$.

b) Utilizar $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ para sustituir $\vec{E}$ por $\vec{D}$ en la ecuación a)

c) Utilizar $\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{enc}^{libre}$ para sustituir $\vec{D}$ por q_{enc}^{libre} en b) y calcular q_{enc}^{libre}.

d) Una vez conocida q_{enc}^{libre}, seguir los pasos dados en *IVa*.

V.- Energía del campo eléctrico

Va.- Densidad de energía del campo electrostático

Dado un elemento de volumen dV cualquiera donde el campo eléctrico vale $\vec{E}$ y el vector desplazamiento eléctrico vale $\vec{D}$, la densidad de energía del campo electrostático es

$$u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

Vb.- Energía del campo electrostático

La energía del campo electrostático contenida en un volumen *V* tiene por valor

$$U_E = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dv$$

VI.- Condiciones de contorno para $\vec{E}$ *y* $\vec{D}$

VIa.- Condiciones de contorno para las componentes normales

Si *S* es la superficie de separación de dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas absolutas ε_1 y ε_2, y $D_{n,1}, D_{n,2}$ son las componentes del vector $\vec{D}$ normales a *S* y a ambos lados de ella, así como $E_{n,1}, E_{n,2}$ son las componentes del vector $\vec{E}$ normales a *S* y a ambos lados de ella (figura *4-6*), se cumplen las relaciones

$$D_{n,1} = D_{n,2} \qquad \varepsilon_1 E_{n,1} = \varepsilon_2 E_{n,2}$$

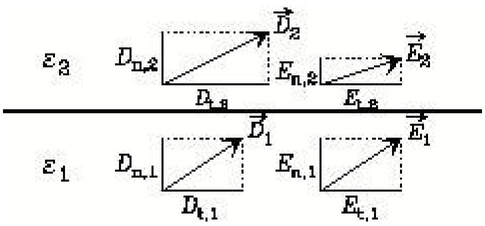

Figura 4-6

VIb.- Condiciones de contorno para las componentes tangenciales

Si *S* es la superficie de separación de dos medios dieléctricos de constantes dieléctricas absolutas ε_1 y ε_2, y $D_{t,1}, D_{t,2}$ son las componentes del vector $\vec{D}$ tangenciales a *S* y a ambos lados de ella, así como $E_{t,1}, E_{t,2}$ son las componentes del vector $\vec{E}$ tangenciales a *S* y a ambos lados de ella, se cumplen las relaciones

$$\frac{D_{t,1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t,2}}{\varepsilon_2} \qquad E_{t,1} = E_{t,2}$$