

Cálculo para la ingeniería

Salvador Vera

16 de diciembre de 2003

Copyright © by Salvador Vera Ballesteros, 1998-2003.

Índice general

4. Integral definida. Cálculo de primitivas	1
4.1. La estimación de un área. Sumas de Riemann.	1
4.1.1. Significado geométrico de la integral	1
4.1.2. Cálculo de límites utilizando el concepto de integral	6
4.1.3. Propiedades de la integral definida	12
4.2. El teorema fundamental del Cálculo	15
4.2.1. Regla de Barrow: La integral como una primitiva	19
4.3. Integración inmediata.	23
4.3.1. Propiedades de la integral indefinida	23
4.3.2. Tabla de integrales inmediatas	24
4.4. Integración mediante cambio de variable	25
4.5. Integración por partes.	28
4.6. Integración de funciones racionales	32
4.6.1. Integración de fracciones elementales	32
4.6.2. Integración de funciones racionales con ayuda del desarrollo en fracciones simples.	33
4.7. Integración de expresiones trigonométricas	40
4.7.1. Integración de potencias de funciones trigonométricas	40
4.7.2. Integración de funciones racionales del sen y del cos	42
4.8. Integración de funciones irracionales	44
4.8.1. Radicales semejantes	44
4.8.2. La sustitución trigonométrica	45
5. Aplicaciones de la integral.	49
5.1. Cálculo del área de una figura plana.	49
5.2. Cálculo del volumen de un cuerpo	52
5.2.1. Volumen de un cuerpo cualquiera: Método de secciones	52
5.2.2. Volumen de un sólido de revolución: Método de discos	53
5.2.3. Volumen de un sólido de revolución: Método de los cilindros	53
5.3. Límite de sumas	59

Copyright © by Salvador Vera Ballesteros, 1998-2003.

Capítulo 5

Aplicaciones de la integral.

5.1. Cálculo del área de una figura plana.

En general, para calcular el área de una región plana:

1. La dividimos en franjas, infinitamente estrechas, de manera horizontal o vertical,
2. Suponemos que las franjas son rectángulos, con lo cual su área se obtendrá como el producto de la base por la altura (la base será el diferencial correspondiente dx o dy), es decir,

$$da = h \, dx, \text{ o bien, } da = h \, dy.$$

3. Calculamos el área total como la *suma* de las áreas de los infinitos rectángulos:

$$A = \int_a^b da$$

Los límites de integración se determinan estudiando el recorrido del diferencial correspondiente.

Si las curvas se cortan dentro del intervalo de integración, entonces habrá que descomponer la integral en dichos puntos y calcular las áreas por separado.

En particular,

Proposición 5.1 (Área bajo una curva). *El área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, siendo $f(x) \geq 0$, por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y por el segmento $[a, b]$ del eje Ox viene definido por la integral,*

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

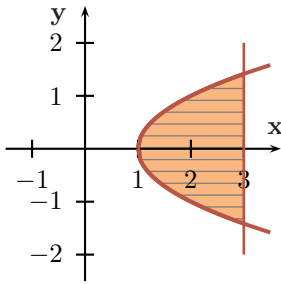
Proposición 5.2 (Área entre dos curvas). *El área de la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, siendo $f_1(x) \leq f_2(x)$, y por las rectas $x = a$ y $x = b$ viene definida por la integral,*

$$\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Ejemplo 5.1. *Hallar el área de la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$*

Solución. En primer lugar localizamos el recinto. Podemos utilizar la función tal como viene definida o bien trasladarla y girarla con objeto de hacer coincidir la recta $x = 3$ con uno de los ejes de coordenadas. En este ejemplo, utilizaremos la función tal como viene definida y dividiremos el recinto en franjas horizontales o verticales.

(a) Franjas horizontales:



Los puntos de corte de ambas curvas son:

$$x = 3 \rightarrow 3 = y^2 + 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{2} \rightarrow (3, \pm\sqrt{2})$$

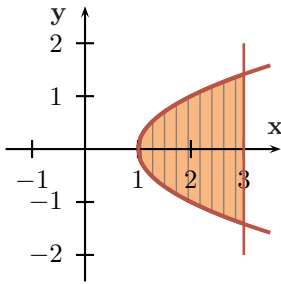
el diferencial de área viene definido por:

$$da = h dy = (3 - x)dy = [3 - (y^2 + 1)]dy = (2 - y^2)dy$$

Con lo cual el área total será:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} da = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (2 - y^2)dy = 2 \left[2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2 \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(b) Franjas verticales:



En este caso los límites de integración son:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 3$$

el diferencial de área viene definido por:

$$da = h dx = (2y)dx = 2\sqrt{x-1} dx = 2(x-1)^{1/2} dx$$

Con lo cual el área total será:

$$A = \int_1^3 da = 2 \int_1^3 (x-1)^{1/2} dx = 2 \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right]_1^3 = 2 \left(\frac{2}{3} 2\sqrt{2} - 0 \right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Ejemplo 5.2. *Calcular el área de la región comprendida entre las parábolas $x = y^2 + 1$ y $x = 3 - y^2$.*

Solución. En primer lugar localizamos el recinto. Podemos utilizar las funciones tal y como vienen definidas o bien intercambiar la x por la y con objeto de que sean funciones respecto de x . En este ejemplo utilizaremos las funciones tal y como vienen definidas y dividiremos el recinto en franjas horizontales.

Los puntos de corte de ambas curvas los obtenemos por igualación:

$$y^2 + 1 = 3 - y^2 \rightarrow 2y^2 = 2 \rightarrow y = \pm 1$$

Es decir, $P(2, 1)$ y $Q(2, -1)$

el diferencial de área viene definido por:

$$\begin{aligned} da = h \, dx = (x_d - x_i) dy &= [(3 - y^2) - (y^2 + 1)] dy = \\ &= (2 - 2y^2) dy \end{aligned}$$

Con lo cual el área total será:

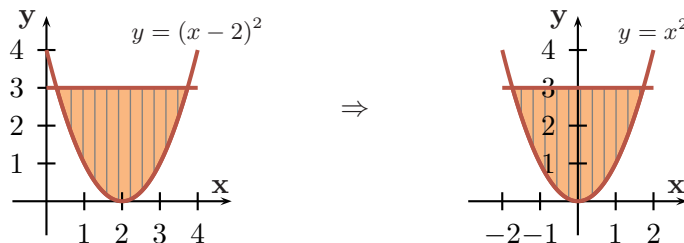
$$A = \int_{-1}^1 da = 2 \int_0^1 da = 2 \int_0^1 (2 - 2y^2) dy = 4 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = 4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}$$

También podemos dividir la región en franjas verticales, pero en este caso el cálculo del área resulta un poco más complicado, ya que tenemos que descomponer la región en dos regiones. En efecto,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 da_1 + \int_2^3 da_2 = \int_1^2 2y_1 dx + \int_2^3 2y_2 dx = \\ &= \int_1^2 2\sqrt{x-1} dx + \int_2^3 2\sqrt{3-x} dx = 2 \left[\frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{-2(3-x)^{3/2}}{3} \right]_2^3 = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = (x-2)^2$ e $y = 3$.

Solución. Para facilitar los cálculos podemos desplazar el recinto 2 unidades a la izquierda, con objeto de centrarlo en el eje de ordenadas, con lo cual la región estará limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$, e $y = 3$.



Dividiendo el recinto en franjas verticales, tenemos:

$$da = h \, dx = (3 - y) \, dx = (3 - x^2) \, dx$$

y los límites de integración:

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

de donde,

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} da = 2 \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) \, dx = 2 \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} \right) = 4\sqrt{3}$$

También podemos dividir el recinto en franjas horizontales, y tenemos:

$$da = h \, dy = (2x) \, dy = (2\sqrt{y}) \, dy = 2y^{1/2} \, dy$$

de donde,

$$A = \int_0^3 da = 2 \int_0^3 y^{1/2} \, dy = 2 \left[\frac{2y^{3/2}}{3} \right]_0^3 = 4\sqrt{3}$$

5.2. Cálculo del volumen de un cuerpo

5.2.1. Volumen de un cuerpo cualquiera: Método de secciones

En general, para calcular el volumen de un cuerpo:

1. Lo dividimos en secciones, rebanadas o lonchas, infinitamente estrechas, mediante cortes con planos perpendiculares a una dirección determinada (normalmente uno de los ejes de coordenadas o una recta paralela a uno de ellos),
2. Suponemos que las secciones son cilíndricas, con lo cual su volumen se obtendrá como el producto del área de la base por la altura (la altura será el diferencial correspondiente dx o dy), es decir, $dv = S(x) \, dx$, o bien $dv = S(y) \, dy$.
3. Calculamos el volumen total como la suma de los volúmenes de las infinitas secciones:

$$V = \int_a^b dv$$

Los límites de integración se determinan estudiando el recorrido del diferencial correspondiente.

En particular,

Proposición 5.3 (Método de las secciones). *Si el área de la sección de un cuerpo por un plano perpendicular al eje Ox puede expresarse en función de x , es decir, $S = S(x)$, siendo $a \leq x \leq b$, entonces el volumen de la parte del cuerpo comprendida entre los planos $x = a$ y $x = b$, perpendiculares al eje Ox , viene definido por la fórmula:*

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

5.2.2. Volumen de un sólido de revolución: Método de discos

Al cortar un sólido mediante planos perpendiculares al eje de giro las secciones que se obtienen son discos, con lo cual su volumen viene determinado por $dv = \pi r^2 dx$, o bien, $dv = \pi r^2 dy$, si el eje de giro es frontera a la región que gira; y por $dv = \pi(r_2^2 - r_1^2) dx$, o bien, $dv = \pi(r_2^2 - r_1^2) dy$, si el eje de giro es exterior a la región que gira.

En consecuencia,

Proposición 5.4 (Giro de trapecio curvilíneo). *Si un trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las verticales por los puntos $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje Ox , entonces el volumen del cuerpo de revolución que se engendra viene definido por la fórmula:*

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Proposición 5.5 (Giro de región entre dos curvas). *Si la región limitada por las curvas $y = f_1(x)$, e $y = f_2(x)$, siendo $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, y las verticales por los puntos $x = a$ y $x = b$ gira alrededor del eje Ox , entonces el volumen del cuerpo de revolución que se engendra viene definido por la fórmula:*

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

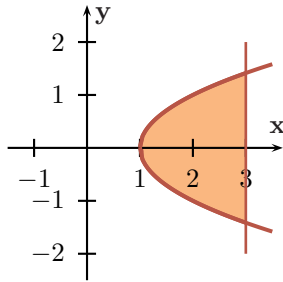
5.2.3. Volumen de un sólido de revolución: Método de los cilindros

Si dividimos un sólido de revolución mediante cilindros concéntricos con el eje de giro, cada cilindro con un espesor infinitesimal. El volumen de cada uno de estos cilindros vendrá determinado por: $dv = 2\pi rh dx$, o bien $dv = 2\pi rh dy$.

La región generatriz deberá estar a un solo lado del eje de giro, en caso contrario habrá que descomponer la integral y hacer los volúmenes por separado. También habrá que descomponer la integral si la región viene determinada por dos curvas que se cortan dentro del intervalo de integración. Este método también se llama de «capas».

Ejemplo 5.4. Hallar por el método de discos y por el de capas el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

Solución. En primer lugar localizamos el recinto.



Podemos utilizar la región tal como viene dada o bien trasladarla y girarla con objeto de que el giro de la región de haga sobre uno de los ejes de coordenadas. Así, pueden utilizarse, por ejemplo, las funciones $y = -x^2 + 2$, o bien, $y = x^2 - 2$, y girarlas sobre el eje Ox . En este ejemplo utilizaremos la función tal como viene definida.

1. Método de discos:

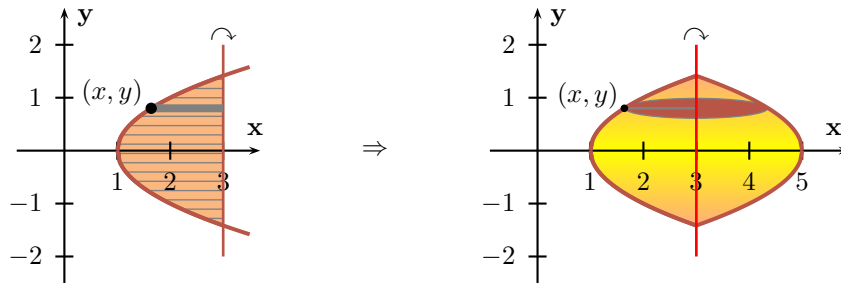


Figura 5.1: Método de discos

Hallamos el volumen de un disco elemental dV ,

$$dV = \pi r^2 dy = \pi(3 - x)^2 dy = \pi(3 - y^2 - 1)^2 dy = \pi(2 - y^2)^2 dy$$

Hallamos los límites de integración para la variable y :

$$x = 3 \rightarrow 3 = y^2 + 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

con lo cual, el volumen total, al ser simétrico, será:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dV = 2 \int_0^{\sqrt{2}} dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^2 dy = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 4y^2 + y^4) dy = 2\pi \left[4y - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= 2\pi \left(4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5} \right) = 2\pi \frac{60\sqrt{2} - 40\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{15} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

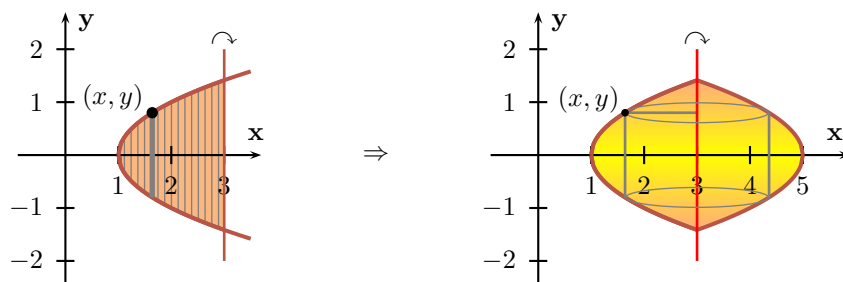


Figura 5.2: Método de capas

2. Método de las capas.

Hallamos el volumen de un cilindro elemental dV ,

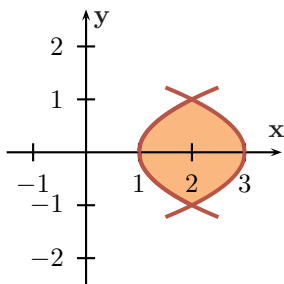
$$dV = 2\pi rh dx = 2\pi(3-x)(2y)dx = 4\pi(3-x)\sqrt{x-1} dx$$

con lo cual el volumen total será.

$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 dV = 4\pi \int_1^3 (3-x)\sqrt{x-1} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} x-1 = t^2 \rightarrow x = t^2 + 1 \rightarrow dx = 2t dt \\ x_0 = 1 \rightarrow t_0 = 0; x_1 = 3 \rightarrow t_1 = \sqrt{2} \end{array} \right] = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} (3-t^2-1)t 2t dt = \\ &= 8\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-t^2)t^2 dt = 8\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2t^2 - t^4) dt = 8\pi \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= 8\pi \left(\frac{2\sqrt{2}^3}{3} - \frac{\sqrt{2}^5}{5} \right) = 8\pi \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} \right) = 8\pi \frac{20\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{15} = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5. Calcular el volumen generado al girar la región comprendida entre las parábolas $x = y^2 + 1$ y $x = 3 - y^2$, alrededor del eje OY , aplicando el método de discos y el de capas.

Solución. En primer lugar localizamos el recinto.



Podemos utilizar la región tal como viene dada o bien intercambiar la x por la y con objeto de que sean funciones respecto de x . En este ejemplo utilizaremos la función tal como viene definida.

Los puntos de corte de ambas curvas los obtenemos por igualación:

$$y^2 + 1 = 3 - y^2 \rightarrow 2y^2 = 2 \rightarrow y = \pm 1$$

Es decir, $P(2, 1)$ y $Q(2, -1)$

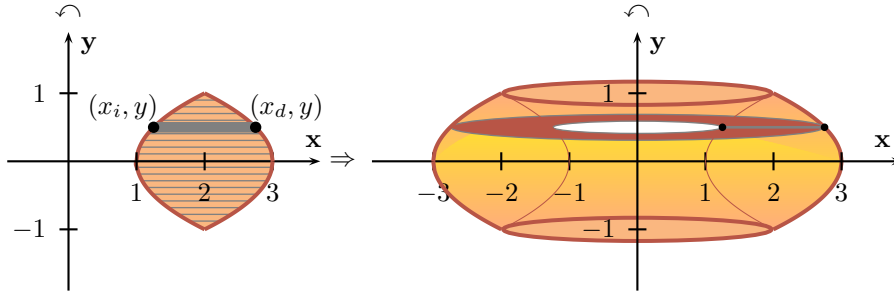


Figura 5.3: Método de discos

1. Método de discos:

Hallamos el volumen de un disco elemental dV ,

$$dV = \pi r_2^2 dy - \pi r_1^2 dy = \pi(x_d^2 - x_i^2)dy = \pi[(3 - y^2)^2 - (y^2 + 1)^2]dy = \pi(8 - 8y^2)dy$$

Los límites de integración para la variable y son $y = \pm 1$. Con lo cual, el volumen, al ser simétrico, será:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 dV = 2 \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 (8 - 8y^2)dy = \\ &= 2\pi \left[8y - \frac{8}{3}y^3 \right]_0^1 = 2\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

2. Método de las capas (cilindros).

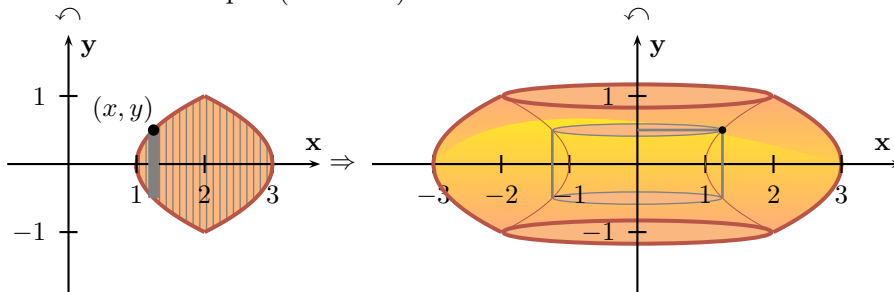


Figura 5.4: Método de cilindros

Hallamos el volumen de un cilindro elemental dV ,

$$dV = 2\pi r h dx = 2\pi x(2y)dx = 4\pi xy dx$$

Ahora bien, el valor de y cambia a partir de $x = 2$, por tanto tendremos que descomponer la integral en este punto. Los límites de integración para la variable x son $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Con lo cual el volumen total será:

$$V = \int_1^2 dV_1 + \int_2^3 dV_2 = 4\pi \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx + 4\pi \int_2^3 x\sqrt{3-x} dx$$

Ambas integrales se resuelven por cambio de variable,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2 \\ x = t^2 + 1 \rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int_0^1 (t^2+1)t2t dt = \\ &= \int_0^1 (2t^4 + 2t^2)dt = \left[\frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^3 x\sqrt{3-x} dx = \left[\begin{array}{l} 3-x = t^2 \rightarrow x = 3-t^2 \\ dx = -2t dt \end{array} \right] = \int_1^0 (3-t^2)t(-2t) dt = \\ &= \int_1^0 (-6t^2 + 2t^4)dt = \left[-\frac{6t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_1^0 = -\left(\frac{-6}{3} + \frac{2}{5}\right) = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Con lo cual, el volumen es,

$$V = 4\pi(I_1 + I_2) = 4\pi\left(\frac{16}{15} + \frac{8}{5}\right) = 4\pi\frac{40}{15} = \frac{160\pi}{15} = \frac{32\pi}{3}$$

Ejemplo 5.6. Dada la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$, obtener, aplicando el método de discos y el de capas, el volumen del sólido formado haciendo girar dicha región en torno al eje OX y al eje OY .

Solución. 1. Giro en torno al eje OX

(a) Método de los discos:

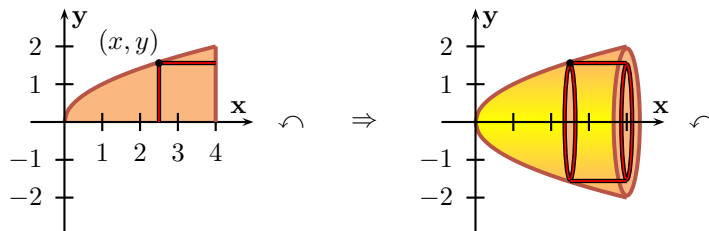


Figura 5.5: Método de discos y cilindros

Por el método de discos, el diferencial de volumen es:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi y^2 dx = \pi x dx$$

de donde, el volumen total será:

$$V = \int_0^4 dV = \int_0^4 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

(b) Método de cilindros. El diferencial de volumen es,

$$dV = 2\pi r h dy = 2\pi y(4-x) dy = 2\pi y(4-y^2) dy = 2\pi(4y - y^3) dy$$

de donde, el volumen total es,

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 2\pi(4y - y^3) dx = 2\pi \left[2y^2 - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi$$

2. Giro en torno al eje OY .

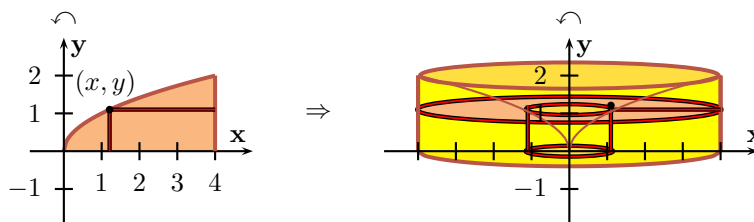


Figura 5.6: Método de discos y cilindros

(a) Método de discos. El diferencial de volumen es,

$$dV = \pi(r_2^2 - r_1^2) dy = \pi(16 - x^2) dy = \pi(16 - y^4) dy$$

de donde, el volumen total es:

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi(16 - y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi(32 - \frac{32}{5}) = \frac{128\pi}{5}$$

(b) Método de los cilindros. El diferencial de volumen es,

$$dV = 2\pi rh dx = 2\pi xy dx = 2\pi x\sqrt{x} dx = 2\pi x^{3/2} dx$$

de donde, el volumen total es

$$V = \int_0^4 dV = \int_0^4 2\pi x^{3/2} dx = 2\pi \left[\frac{2x^{5/2}}{5} \right]_0^4 = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 32}{5} = \frac{128\pi}{5}$$

Ejemplo 5.7. Obtener el volumen del sólido formado al girar la región limitada por las gráficas de $y = (x - 2)^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$, aplicando el método de discos y el de capas.

Solución. Para facilitar los cálculos podemos desplazar el recinto 2 unidades a la izquierda, con objeto de centrarlo en el eje de ordenadas. Con lo cual el volumen se generará al girar la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 3$, en torno a la recta $y = 3$. También se podría voltear la región con objeto de hacerla girar en torno al eje Ox , sin embargo, la integral resultante en esta caso es un poco más difícil.

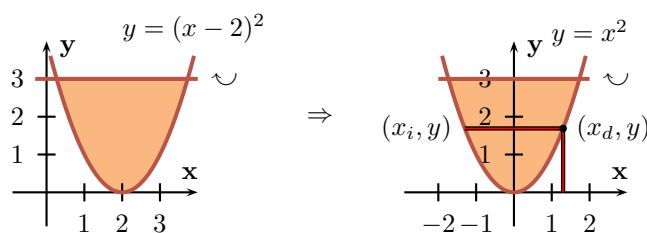


Figura 5.7: Método de discos y cilindros

1. Método de discos. Hallamos el volumen de un disco elemental dV :

$$dV = \pi r^2 dx = \pi(3 - y)^2 dx = \pi(3 - x^2)^2 dx = \pi(9 - 6x^2 + x^4) dx$$

Los límites de integración para la variable x son $\pm\sqrt{3}$, y al ser la región simétrica resulta:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dV = 2 \int_0^{\sqrt{3}} dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (9 - 6x^2 + x^4) dx = \\ &= 2\pi \left[9x - 2x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(9\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} \right) = \\ &= 2\pi \frac{45\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{5} = \frac{48\pi\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

2. Método de los cilindros. Hallamos el volumen de un disco elemental dV :

$$dV = 2\pi r h dy = 2\pi(3 - y)2\sqrt{y} dy = 4\pi(3 - y)\sqrt{y} dy$$

Los límites de integración de la variable y son 0 y 3, con lo cual el volumen total será:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 dV = 4\pi \int_0^3 (3 - y)\sqrt{y} dy = 4\pi \int_0^3 (3y^{1/2} - y^{3/2}) dy = \\ &= 4\pi \left[2y^{3/2} - \frac{2y^{5/2}}{5} \right]_0^3 = 4\pi \left[2 \cdot 3\sqrt{3} - \frac{2 \cdot 9\sqrt{3}}{5} \right] = 4\pi \frac{30 - 18}{5} \sqrt{3} = \frac{48\pi\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

5.3. Límite de sumas

Los siguientes límites pueden calcularse mediante integrales:

Proposición 5.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Ejemplo 5.8. Calcular el siguiente límite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \cdots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}}$.

Solución. Este límite lo podemos resolver mediante integrales, en efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \cdots + \sqrt{4n+n}}{n^{3/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} + \cdots + \sqrt{4n+n}}{n \cdot n^{1/2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{4n+i}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{4 + \frac{i}{n}} = \\ &= \int_0^1 \sqrt{4+x} \, dx = \int_0^1 (4+x)^{1/2} = \left[\frac{2(4+x)^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 8) \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Larson - Hostetler “*Cálculo y Geometría Analítica*”. Mc Graw Hill, 1992.
- [2] Claudio Pita Ruiz “*Calculo Vectorial*”. Prentice Hall Hispanoamericana, Mexico, 1994.

Índice alfabético

Integral

aplicaciones, 49
áreas, 49

Volumen, 52

de revolución
capas, 53
discos, 53