

Capítulo 4

Integral definida y Cálculo de primitivas

Problemas resueltos
Salvador Vera Ballesteros
www.satd.uma.es/matap/svera

4.1 Integración inmediata.

Definición 4.1 (Primitiva) Una función $F(x)$ se llama primitiva de otra función $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

Proposición 4.1 Si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, que se diferencian entre sí en una constante.

Definición 4.2 (Integral indefinida) Se llama integral indefinida de una función $f(x)$ al conjunto formado por todas sus primitivas, y se denota por:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

4.1.1 Propiedades de la integral indefinida

1. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$
2. $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$
3. $\int df(x) = f(x) + C$
4. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
5. $\int r f(x) dx = r \int f(x) dx$ Un factor constante puede sacarse fuera del signo de integración.

4.1.2 Tabla de integrales inmediatas

$$\begin{array}{ll}
\int dx = x + C & \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C \\
\int n^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C \\
\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \\
\int e^x dx = e^x + C & \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C \\
\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \int \sinh x \, dx = \cosh x + C \\
\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C & \int \cosh x \, dx = \sinh x + C \\
\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C & \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C & \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C &
\end{array}$$

Ejemplo 4.1 Hallar la integral $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

Solución: Realizando el cuadrado tenemos:

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| + C$$

Ejemplo 4.2 Hallar la integral $\int \frac{(x+1)^2}{x^3+x} dx$

Solución: Operando tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1)^2}{x^3+x} dx &= \int \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{(x^2+1)+2x}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx = \\
&= \ln |x| + 2 \arctan x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3 Hallar la integral $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

Solución: Operando tenemos:

$$\begin{aligned}
\int (\tan x + \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) dx = \\
&= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx = \int (\tan^2 x + 1 + 1 + \cot^2 x) dx = \\
&= \int (\tan^2 x + 1) dx + \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx = \tan x - \cot x + C
\end{aligned}$$

4.2 Integración mediante cambio de variable

El cambio de variable en una integral indefinida se puede efectuar de dos formas:

1. Cambiando la variable x por una función $x = g(t)$, donde $g(t)$ es una función monótona continuamente derivable de una nueva variable t .

$$\int f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{array} \right] = \int f[g(t)] g'(t) dt$$

2. Cambiando parte del integrando por una nueva variable $g(x) = t$:

$$\int f[g(x)] g'(x) dx = \left[\begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{array} \right] = \int f(t) dt$$

En la práctica se combinan ambos métodos, ya que $x = g(t) \leftrightarrow t = g^{-1}(x)$. La función que se utilice tendrá que tener derivada continua para que se pueda realizar la nueva integral, e inversa para poder deshacer el cambio.

Ejemplo 4.4 Hallar la integral $\int \frac{e^{6x} dx}{e^{6x} + 1}$

Solución: Teniendo en cuenta que el numerador es la derivada del denominador, salvo un factor constante, hacemos el cambio de variable buscando la derivada del \ln :

$$\int \frac{e^{6x} dx}{e^{6x} + 1} = \left[\begin{array}{l} e^{6x} + 1 = t \\ 6e^{6x} dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} = \frac{\ln t}{6} + C = \frac{\ln e^{6x} + 1}{6} + C$$

Ejemplo 4.5 Hallar la integral $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{6x} + 1}$

Solución: En este caso hacemos el cambio de variable buscando la derivada del \arctan :

$$\int \frac{e^{3x} dx}{e^{6x} + 1} = \left[\begin{array}{l} e^{3x} = t \\ 3e^{3x} dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{3} \arctan t + C = \frac{1}{3} \arctan e^{3x} + C$$

Ejemplo 4.6 Hallar la integral $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Solución: En este caso hacemos el cambio de variable buscando dejar el *seno* exclusivamente en función de la variable de integración:

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \end{array} \right] = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$

Ejemplo 4.7 Hallar la integral $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

Solución: En este caso hacemos el cambio de variable buscando eliminar la raíz cuadrada, para lo cual hacemos $\sqrt{x+1} = t$, sin embargo, en vez de derivar esta expresión directamente, la elevamos al cuadrado previamente:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t \rightarrow x+1 = t^2 \rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{(t^2+1)t} = \\ &= \int \frac{2 dt}{(t^2+1)} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8 Hallar la integral $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

Solución: En este caso podemos elegir entre dos opciones; hacemos el cambio de variable buscando eliminar la raíz cuadrada, o bien, tenemos cuenta que la expresión que hay fuera de la raíz es la derivada del radicando.

En el primer caso,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^3+1} = t \rightarrow x^3+1 = t^2 \\ 3x^2 dx = 2t dt \end{array} \right] = \frac{2}{3} \int t \cdot t dt = \frac{2}{3} \int t^2 dt = \\ &= \frac{2}{3} \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3+1})^3 + C = \frac{2}{9} (x^3+1) \sqrt{x^3+1} + C \end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x^3+1} dx &= \left[\begin{array}{l} x^3+1 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{1/2} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \\ &= \frac{2}{9} (\sqrt{x^3+1})^3 + C = \frac{2}{9} (x^3+1) \sqrt{x^3+1} + C \end{aligned}$$

4.3 Integración por partes.

Integrando la diferencial del producto de dos funciones $d(uv) = v du + u dv$ resulta, $\int d(uv) = \int v du + \int u dv$, de donde, $uv = \int v du + \int u dv$. Esto nos permite expresar una de las dos integrales en función de la otra:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

La constante de integración sólo se añade al final del proceso.

Ejemplo 4.9 Hallar la integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

Solución:

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen} x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \\ dv = \operatorname{sen} x \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10 Hallar la integral $\int x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$

Solución: En este ejemplo la elección de u y dv no resultan evidentes. Forzamos la situación para que el dv elegido sea fácil de integrar.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = x\sqrt{1+x^2} \, dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2x \, dx \\ v = \int x\sqrt{1+x^2} \, dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2} 2x \, dx}{2} = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{2 \cdot 3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} \end{array}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx &= \frac{x^2(1+x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3} \int (1+x^2)^{3/2} 2x \, dx = \frac{x^2(1+x^2)^{3/2}}{3} - \frac{1}{3} \frac{(1+x^2)^{5/2}}{5/2} = \\ &= \frac{1}{3} x^2 (1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15} (1+x^2)^{5/2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.11 Hallar la integral $\int \ln x \, dx$

Solución: Elegimos $u = \ln x$ y como dv el propio dx .

$$\int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} \, dx \\ v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Ejemplo 4.12 Hallar la integral $\int \arctan x \, dx$

Solución: Elegimos $u = \arctan x$ y como dv el propio dx .

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan x \\ dv = dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array} \right] = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.13 Hallar la integral $\int x^2 e^x dx$

Solución: Elegimos $u = x^2$ y $dv = e^x dx$.

$$\int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = e^x \end{array} \Bigg] = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - I_1$$

Aparece una nueva integral I_1 que tambien calculamos por partes.

$$I_1 = \int 2x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = e^x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = 2 dx \\ v = e^x \end{array} \Bigg] = 2x e^x - \int 2 e^x dx = 2x e^x - 2e^x$$

de donde resulta,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) + C = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

Ejemplo 4.14 Hallar la integral $\int e^x \sen x dx$

Solución: Elegimos $u = e^x$ y $dv = \sen x dx$.

$$\int e^x \sen x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \sen x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{array} \Bigg] = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_1$$

Aparece una nueva integral I_1 que tambien calculamos por partes.

$$I_1 = \int e^x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} du = e^x dx \\ v = \sen x \end{array} \Bigg] = e^x \sen x - \int e^x \sen x dx$$

Apareciendo, nuevamente, la integral que, en un principio, tratabamos da calcular. Sustituimos y operamos como si se tratara de una ecuación, agrupando las dos integrales,

$$\int e^x \sen x dx = -e^x \cos x + e^x \sen x - \int e^x \sen x dx$$

de donde resulta,

$$2 \int e^x \sen x dx = -e^x \cos x + e^x \sen x$$

y despejando la integral y añadiando la constante, resulta

$$\int e^x \sen x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sen x}{2} + C$$

Ejemplo 4.15 Hallar la integral $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

Solución: Elegimos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $dv = dx$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = dx \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Aparece una nueva integral I_1 que calculamos sumando y restando a^2 en el numerador.

$$I_1 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

La primera integral es inmediata. Para calcular la segunda integral racionalizamos la expresión con lo cual resulta,

$$I_1 = a^2 \arcsen \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Apareciendo, nuevamente, la integral que, en un principio, tratábamos de calcular. Sustituimos y operamos como si se tratara de una ecuación, agrupando las dos integrales,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

de donde resulta,

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen \frac{x}{a}$$

y despejando la integral y añadiendo la constante, resulta

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} + C$$

4.4 Integración de funciones racionales

Se llaman funciones racionales a las que vienen definidas por el cociente de dos polinomios.

$$\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$$

4.4.1 Integración de fracciones elementales

Se denominan *fracciones simples (o elementales)* a las fracciones racionales de los cuatro tipos siguientes:

$$\text{I. } \frac{1}{x-a} \quad \text{II. } \frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

siendo x^2+px+q irreducible.

Las siguientes integrales racionales son inmediatas:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-a} dx &= \ln|x-a| + C & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C \\ \int \frac{1}{(x-a)^n} dx &= \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \end{aligned}$$

Integrales del tipo: $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx \quad \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ siendo $x^2+px+q \neq 0$

En el trinomio cuadrado del denominador se separa el cuadrado perfecto del binomio.

Ejemplo 4.16 Hallar la integral $\int \frac{1}{x^2+4x+13} dx$

Solución: Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$x^2+4x+13 = (x+2)^2 - 4 + 13 = (x+2)^2 + 9$$

de donde,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+4x+13} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{9} \int \frac{1/3 dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1} = \\ &= \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.17 Hallar la integral $\int \frac{1}{2x^2-4x+10} dx$

Solución: Expresamos el denominador como el cuadrado de un binomio, sacando previamente 2 factor común,

$$2x^2-4x+10 = 2[x^2-2x+5] = 2[(x-1)^2-1+5] = 2[(x-1)^2+4]$$

de donde,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2-4x+10} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \frac{2}{8} \int \frac{1/2 dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\ &= \frac{1}{4} \arctan \frac{x-1}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.18 Hallar la integral $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+8} dx$

Solución: Esta integral es del tipo $\ln + \arctan$. Para ello buscamos en el numerador la derivada del denominador $2x-4$ y luego separamos en dos integrales; la primera es un \ln y en la segunda buscamos el \arctan , expresando el denominador como el cuadrado de un binomio,

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2) dx}{x^2-4x+8} &= 3 \int \frac{(x+2/3) dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2} \int \frac{2x+4/3}{x^2-4x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-4+4+4/3}{x^2-4x+8} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + \frac{3}{2} \int \frac{16/3 dx}{(x-2)^2+4} = \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+8| + 4 \int \frac{1/2 dx}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+8) + 4 \arctan \frac{x-2}{2} + C \end{aligned}$$

4.4.2 Integración de fracciones racionales con ayuda del desarrollo en fracciones simples.

Al integrar una función racional se deben seguir los siguientes pasos:

1. División de los polinomios.- Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, la primera operación es efectuar la división.

$$\begin{array}{r} P(x) \quad | \quad Q(x) \\ R(x) \quad C(x) \end{array}$$

De donde, aplicando la prueba de la división, resulta:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad \rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales; la primera es inmediata por ser la integral de un polinomio, y la segunda es más fácil que la inicial ya que el grado de $R(x)$ es inferior que el de $Q(x)$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

2. Factorización del denominador. Pueden darse los siguientes casos:

- (a) El denominador tiene sólo raíces reales simples.
- (b) El denominador tiene sólo raíces reales, aunque alguna de ellas es múltiple.

- (c) Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible.
- (d) Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiple, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible que se repite.

3. Descomponer la fracción en fracciones simples.

La determinación de los coeficientes se puede hacer por dos métodos:

1. Identificando los coeficientes de los términos del mismo grado de x .
2. Dando valores arbitrarios a x .

nota: En todo momento debemos comprobar si la fracción que vamos a integrar es o no una fracción elemental, o la derivada de un \ln .

Ejemplo 4.19 Hallar la integral $\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 12}{x^2 - 4} dx$

Solución: Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 - 6x - 12 \\ -2x^3 \quad + 8x \\ \hline 3x^2 + 2x - 12 \\ -3x^2 \quad + 12 \\ \hline 2x \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x^2 - 4} \\ 2x + 3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 12}{x^2 - 4} = 2x + 3 + \frac{3x}{x^2 - 4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser la derivada de un logaritmo.

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 6x - 12}{x^2 - 4} dx = \int (2x + 3) dx + \int \frac{3x}{x^2 - 4} dx = x^2 + 3x + \ln|x^2 - 4| + C$$

Ejemplo 4.20 Hallar la integral $\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 13}{x^2 - 4x + 4} dx$

Solución: Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 4x + 13 \\ -2x^3 + 8x^2 - 8x \\ \hline 3x^2 - 12x + 13 \\ -3x^2 + 12x - 12 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) x^2 - 4x + 4} \\ 2x + 3 \end{array}$$

Por consiguiente, aplicando la prueba de la división, resulta:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 13}{x^2 - 4x + 4} = 2x + 3 + \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser elemental.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 13}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int (2x + 3) dx + \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4} dx = x^2 + 3x + \int \frac{1}{(x - 2)^2} dx = \\ &= x^2 + 3x - \frac{1}{x - 2} + C \end{aligned}$$

(a) El denominador tiene sólo raíces reales simples.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \cdots + \frac{N}{x - x_n}$$

Ejemplo 4.21 Hallar la integral $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx$

Solución: Efectuamos la división de los polinomios,

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{-x^2 + 2x + 8} \begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 \\ \hline x^2 - 2x - 8 \\ \hline 5x + 4 \end{array} \rightarrow \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} = 1 + \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, la primera es inmediata, por ser polinómica, pero la segunda no.

$$\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx = \int 1 dx + \int \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx = x + I_1$$

Para calcular la segunda integral factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

de donde resulta,

$$\frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \frac{5x + 4}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 4)}{(x - 4)(x + 2)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x ,

$$\begin{aligned} x = 4 &\rightarrow 24 = 6A \rightarrow A = 4 \\ x = -2 &\rightarrow -6 = -6B \rightarrow B = 1 \end{aligned}$$

Con lo cual resulta,

$$I_1 = \int \frac{5x+4}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{4}{x-4} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = 4 \ln|x-4| + \ln|x+2|$$

de donde,

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx = x + 4 \ln|x-4| + \ln|x+2| + C$$

(b) El denominador tiene sólo raíces reales, aunque alguna de ellas es múltiple.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)(x-x_2)^3} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)^3}$$

Ejemplo 4.22 Hallar la integral $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$

Solución: Efectuamos la división de los polinomios,

$$\begin{array}{r} x^4 - x^3 - x - 1 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline -x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} | x^3 - x^2 \\ x \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x + \frac{-x - 1}{x^3 - x^2}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, la primera inmediata, por ser polinómica, y la segunda no.

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \int x dx + \int \frac{-x - 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + I_1$$

Para calcular la segunda integral factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

de donde resulta,

$$\frac{-x-1}{x^3-x^2} = \frac{-x-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x ,

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow -1 = -B \rightarrow B = 1 \\ x = 1 &\rightarrow -2 = C \rightarrow C = -2 \\ x = 2 &\rightarrow -3 = 2A + B + 4C \rightarrow -3 = 2A + 1 - 8 \rightarrow 2A = 4 \rightarrow A = 2 \end{aligned}$$

Con lo cual resulta,

$$I_1 = \int \frac{-x-1}{x^3-x^2} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx = 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1|$$

de donde,

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| - \frac{1}{x} - 2 \ln |x - 1| + C$$

(c) Entre las raíces del denominador las hay complejas simples, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_2)^2(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{(x - x_2)^2} + \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo 4.23 Hallar la integral $\int \frac{8x^2 + 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx$

Solución: Factorizamos el denominador y descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 7 & -5 \\ 1 & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5) \\ x^2 - 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ Sin solución.} \end{array}$$

De donde resulta,

$$\begin{aligned} \frac{8x^2 + 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} &= \frac{8x^2 + 6x + 6}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Mx + N}{x^2 - 2x + 5} = \\ &= \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Mx + N)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} \end{aligned}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x ,

$$x = 1 \rightarrow 20 = 4A \rightarrow A = 5$$

$$x = 0 \rightarrow 6 = 5A - N \rightarrow N = 5A - 6 = 25 - 6 = 19$$

$$x = 2 \rightarrow 50 = 5A + 2M + N \rightarrow 50 = 25 + 2M + 19 \rightarrow 2M = 50 - 25 - 19 = 6 \rightarrow M = 3$$

Con lo cual resulta,

$$\int \frac{8x^2 + 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx = \int \frac{5}{x - 1} dx + \int \frac{3x + 19}{x^2 - 2x + 5} dx = 5 \ln |x - 1| + I_1$$

Para calcular la integral I_1 siempre seguimos el siguiente procedimiento: En primer lugar expresamos la parte literal del denominador como el cuadrado de un binomio y al binomio le llamamos t ,

$$x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 - 1 + 5 = (x - 1)^2 + 4$$

Con lo cual resulta la siguiente integral,

$$I_1 = \int \frac{3x + 19}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{3x + 19}{(x - 1)^2 + 4} dx = \left[\begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{3t + 22}{t^2 + 4} dt =$$

Para resolver esta integral separamos la parte literal de la parte numérica; con la parte literal buscamos un \ln y con la numérica un \arctan

$$\begin{aligned} &= \int \frac{3t}{t^2+4} dt + \int \frac{22}{t^2+4} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+4} dt + \frac{22}{4} \int \frac{1}{t^2/4+1} dt = \\ &= \frac{3}{2} \ln|t^2+4| + \frac{22}{4} \cdot 2 \int \frac{1/2}{(t/2)^2+1} dt = \frac{3}{2} \ln|t^2+4| + 11 \arctan \frac{t}{2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+5| + 11 \arctan \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

con lo cual, resulta

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5} dx = 5 \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+5| + 11 \arctan \frac{x-1}{2} + C$$

(d) Entre las raíces del denominador las hay complejas múltiple, alguno de los factores es un polinomio de segundo grado irreducible que se repite.

Estas integrales se resuelven buscado una fórmula recurrente, o mediante el método de Hermite, pero quedan fuera del alcance de este curso.

4.5 Integración de expresiones trigonométricas

4.5.1 Integración de potencias de funciones trigonométricas

Consideremos integrales del tipo:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

existen dos casos para los que se puede resolver la integral,

1. Si alguno de los exponentes es un número impar y positivo, se separa uno para el diferencial y el resto se transforma en el contrario, mediante la formula fundamental de la trigonometría $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, y al contrario se le llama t . El segundo coeficiente puede ser cualquier número real.

ej. si $m = 2k+1 \rightarrow \sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \cdot \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (\sqrt{1-\cos^2 x})^k \sin x$

2. Si los dos exponentes son pares positivos, se van rebajando los grados con las siguientes fórmulas trigonométricas.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Ejemplo 4.24 Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$

Solución: Tenemos,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \\ &= \int (\cos^2 x - \cos^4 x) \operatorname{sen} x \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x \, dx = dt \end{array} \right] = - \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{-t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.25 Hallar la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{(\cos 2x)^{3/2}} \, dx$

Solución: Tenemos,

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{(\cos 2x)^{3/2}} \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 2x (\cos 2x)^{-3/2} \, dx = \int \operatorname{sen}^2 2x (\cos 2x)^{-3/2} \operatorname{sen} 2x \, dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 2x) (\cos 2x)^{-3/2} \operatorname{sen} 2x \, dx = \int \left((\cos 2x)^{-3/2} - (\cos 2x)^{1/2} \right) \operatorname{sen} 2x \, dx = \\ &= \frac{-1}{2} \int \left((\cos 2x)^{-3/2} - (\cos 2x)^{1/2} \right) (-2 \operatorname{sen} 2x) \, dx = \left[\begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2 \operatorname{sen} 2x \, dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \frac{-1}{2} \int (t^{-3/2} - t^{1/2}) \, dt = \frac{-1}{2} \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = t^{-1/2} + \frac{t^{3/2}}{3} + C = \\ &= (\cos 2x)^{-1/2} + \frac{1}{3} (\cos 2x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.26 Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$

Solución: Tenemos,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx = \frac{1}{8} \int (2 - 4 \cos 2x + 1 + \cos 4x) \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4 \cos 2x + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} \left(3x - \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} \right) + C = \\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C \end{aligned}$$

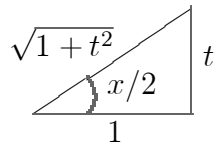
4.5.2 Integración de funciones racionales del sen y del \cos

Consideremos las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \, dx$, donde R es una función racional. En general, esta integral siempre se puede transformar en una integral racional mediante

el cambio $\tan(x/2) = t$.

Como resultado de esta sustitución tenemos:

$$\tan(x/2) = t \rightarrow x/2 = \arctan t \rightarrow x = 2 \arctan t \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$



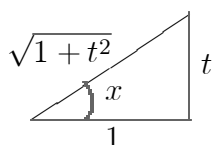
$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \cos \frac{x}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

El cambio general $\tan(x/2) = t$ siempre resuelve la integral, pero en muchos casos conduce a cálculos complicados. Existen tres casos particulares en los que la integral se puede resolver de una manera más fácil que con el cambio general.

1. Si la función $R(\sin x, \cos x)$ es *impar* respecto a $\sin x$, o sea, si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\cos x = t$
2. Si la función $R(\sin x, \cos x)$ es *impar* respecto a $\cos x$, o sea, si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\sin x = t$
3. Si la función $R(\sin x, \cos x)$ es *par* respecto a $\sin x$ y $\cos x$, o sea, si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, entonces la integral se racionaliza con ayuda de la sustitución $\tan x = t$

En este caso, como resultado de esta sustitución tenemos:

$$\tan x = t \rightarrow x = \arctan t \rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$



$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.27 Hallar la integral $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Solución: La función es impar respecto al $\sin x$, por tanto, hacemos el cambio $\cos x = t$, de donde resulta,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t \rightarrow \sin x = \sqrt{1-t^2} \\ -\sin x dx = dt \rightarrow dx = \frac{-dt}{\sin x} = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right] = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} dx = \\ &= \int \frac{-dt}{1-t^2} dx = \int \frac{dt}{t^2-1} dx = I \end{aligned}$$

Que es una función racional,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{A}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x

$$x = 1 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = 1/2$$

$$x = -1 \rightarrow 1 = -2A \rightarrow A = -1/2$$

de donde,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{-1/2}{t+1} dt + \int \frac{1/2}{t-1} dt = \frac{-1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 4.28 Hallar la integral $\int \frac{dx}{(2 + \cos x - 2 \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}$

Solución: Hacemos el cambio general $\tan(x/2) = t$, con lo cual resulta,

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x - 2 \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x} &= \int \frac{1}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2}\right) \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \\ &= \int \frac{dt}{\frac{2 + 2t^2 + 1 - t^2 - 4t}{1+t^2} t} = \int \frac{1+t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} dt = I \end{aligned}$$

que es una integral racional, para resolverla la descomponemos en fracciones simples.

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{t-1} = \frac{A(t-3)(t-1) + Bt(t-1) + Ct(t-3)}{t(t-3)(t-1)}$$

Los coeficientes los calculamos dando valores a x

$$t = 0 \rightarrow 1 = 3A \rightarrow A = 1/3$$

$$t = 1 \rightarrow 2 = -2C \rightarrow C = -1$$

$$t = 3 \rightarrow 10 = 6B \rightarrow B = 10/6 = 5/3$$

de donde,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1/3}{t} dt + \int \frac{5/3}{t-3} dt + \int \frac{-1}{t-1} dt = \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{5}{3} \ln|t-3| - \ln|t-1| = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 3 \right| - \ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + C \end{aligned}$$

4.6 Integración de funciones irracionales

4.6.1 Radicales semejantes

Las integrales del tipo

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_2/n_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right) dx$$

se convierten en racionales con el cambio de variable,

$$\sqrt[\alpha]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^\alpha \text{ donde } \alpha = \text{mcm}\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$$

Ejemplo 4.29 Calcular la integral $\int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1} dx$

Solución: Expresamos las raíces con índice común.

$$\int \frac{(2x-3)^{1/2}}{(2x-3)^{1/3}+1} dx = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx = \int \frac{\sqrt[6]{(2x-3)^3}}{\sqrt[6]{(2x-3)^2}+1} dx = I$$

y hacemos el siguiente cambio:

$$\sqrt[6]{2x-3} = t \rightarrow 2x-3 = t^6 \rightarrow 2dx = 6t^5 dt \rightarrow dx = 3t^5 dt$$

de donde,

$$I = \int \frac{t^3}{t^2+1} 3t^5 dt = \int \frac{3t^8}{t^2+1} dt = I$$

que es una integral racional, para resolverla efectuamos la división de los polinomios.

$$\begin{array}{r} 3t^8 \\ -3t^8 - 3t^6 \\ \hline -3t^6 \\ 3t^6 + 3t^4 \\ \hline 3t^4 \\ -3t^4 - 3t^2 \\ \hline -3t^2 \\ 3t^2 + 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Por consiguiente:

$$\frac{3t^8}{t^2+1} = 3t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 3 + \frac{3}{t^2+1}$$

Con lo cual, la integral se transforma en dos integrales, que en este caso ambas resultan inmediatas; la primera por ser polinómica, y la segunda por ser elemental.

$$\begin{aligned} I &= \int (3t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 3) dx + \int \frac{3}{t^2+1} dx = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^3}{3} - 3t + 3 \arctan t + C = \\ &= 3 \left[\frac{1}{7}(2x-3)^{7/6} - \frac{1}{5}(2x-3)^{5/6} + \frac{1}{3}(2x-3)^{3/6} - (2x-3)^{1/6} + \arctan(2x-3)^{1/6} \right] + C \end{aligned}$$

4.6.2 La sustitución trigonométrica

Las integrales de la forma:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0$$

se suelen resolver mediante la sustitución trigonométrica o bien la sustitución hiperbólica. Para ello, formamos previamente el cuadrado perfecto en el trinomio $ax^2 + bx + c$, y realizando la correspondiente sustitución lineal, la integral se reduce a uno de los siguientes tipos:

$$\int R(t, \sqrt{p^2 - t^2}) dx, \quad \int R(t, \sqrt{t^2 - p^2}) dx, \quad \int R(t, \sqrt{t^2 + p^2}) dx$$

A la primera integral se le aplica cualquiera de las sustituciones:

$$t = p \operatorname{sen} u, \quad t = p \cos u, \quad t = p \tanh u$$

a la segunda, las sustituciones:

$$t = p \sec u, \quad t = p \cosh u$$

y a la tercera, las sustituciones:

$$t = p \tan u, \quad t = p \sinh u$$

En general, para elegir el tipo de sustitución que se va a aplicar, se tiene en cuenta que de lo que se trata es de eliminar la raíz cuadrada, buscando un cuadrado en su interior, para ello se elige la fórmula fundamental de la trigonometría o de la trigonometría hiperbólica que convenga.

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 & \rightarrow \cos^2 \alpha &= 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \\ \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha &= 1 & \rightarrow \cosh^2 \alpha &= 1 + \sinh^2 \alpha \end{aligned}$$

En todos estos casos, el cuadrado se elimina con la raíz, ya que el radicando resulta positivo.

Ejemplo 4.30 Calcular la integral $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

Solución: Aplicamos la sustitución $x = \operatorname{sen} t$ y transformamos la integral en una integral trigonométrica.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sen} t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t dt = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} + C = \frac{t}{2} + \frac{2 \operatorname{sen} t \cos t}{4} + C = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + C \end{aligned}$$

de donde, al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\operatorname{sen} t = x \quad \rightarrow \quad t = \arcsen x, \quad \cos t = \sqrt{1 - x^2}$$

Ejemplo 4.31 Calcular la integral $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$

Solución: Aplicamos la sustitución $x = \cosh t$ y transformamos la integral en una integral hiperbólica.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \left[\begin{array}{l} x = \cosh t \\ dx = \sinh t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{\cosh^2 t - 1} \sinh t dt = \int \sinh t \sinh t dt = \\ &= \int \sinh^2 t dt = \int \frac{\cosh 2t - 1}{2} dt = \frac{\sinh 2t}{4} - \frac{t}{2} + C = \frac{2 \sinh t \cosh t}{4} - \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}] + C \end{aligned}$$

de donde, se han tenido en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\sinh^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}, \quad \sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$$

y al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\cosh t = x \quad \rightarrow \quad t = \arg \cosh x = \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}], \quad \sinh t = \sqrt{x^2 - 1}$$

Ejemplo 4.32 Calcular la integral $\int \sqrt{4x - x^2} dx$

Solución: Formamos previamente el binomio cuadrado en el radicando.

$$4x - x^2 = -[x^2 - 4x] = -[(x - 2)^2 - 4] = 4 - (x - 2)^2$$

de donde, aplicando la sustitución $x - 2 = 2 \sin t$, transformamos la integral en una integral trigonométrica, en efecto,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x - x^2} dx &= \int \sqrt{4 - (x - 2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} x - 2 = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \\ &= 4 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 4 \int \cos t \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= 2 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right] + C = 2t + 2 \sin t \cos t + C = 2 \arcsen \frac{x - 2}{2} + 2 \frac{x - 2}{2} \frac{1}{2} \sqrt{4x - x^2} + C = \\ &= 2 \arcsen \frac{x - 2}{2} + \frac{x - 2}{2} \sqrt{4x - x^2} + C \end{aligned}$$

de donde, se han tenido en cuenta las siguientes fórmulas:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

y al deshacer el cambio, se ha tenido en cuenta que:

$$\sin t = \frac{x - 2}{2} \quad \rightarrow \quad t = \arcsen \frac{x - 2}{2}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x - 2}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4x - x^2}$$