

Capítulo 1

Funciones de varias variables: Límites y continuidad

Problemas resueltos

Salvador Vera Ballesteros

www.satd.uma.es/matap/svera

1.1 Campo de definición. Curvas de nivel

1.1.1 Campo de definición:

Definición 1.1 (Función de dos variables) *Dada dos subconjuntos no vacíos $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Si a cada par de números reales (x, y) perteneciente al conjunto \mathcal{D} se le pone en correspondencia, según una regla determinada f , un y sólo un elemento z de \mathcal{I} , $z = f(x, y)$, se dice que sobre el conjunto \mathcal{D} se ha definido la función f con el conjunto de valores \mathcal{I} .*

Esto se expresa de cualquiera de las formas siguientes:

$$\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathcal{I} \quad \text{o bien} \quad f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{I} \quad \text{siendo} \quad z = f(x, y)$$

o bien, sin hacer referencia al conjunto \mathcal{I} :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{o bien} \quad f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{siendo} \quad z = f(x, y)$$

Definición 1.2 (Campo de definición) *El conjunto \mathcal{D} , formado por todos los pares (x, y) a los que la función asigna imagen $f(x, y)$, se llama dominio o campo de definición de la función; y el conjunto \mathcal{I} , compuesto por todos los números del tipo $f(x, y)$, donde $(x, y) \in \mathcal{D}$, se denomina imagen o conjunto de valores de la función.*

En general, el dominio de una función de dos variables vendrá determinado por una región del plano.

Definición 1.3 (Dominio implícito) *Cuando la función viene definida por una fórmula $z = f(x, y)$ y no se indica el correspondiente dominio \mathcal{D} , se sobreentiende que el dominio viene implícito en la fórmula, y está formado por todos los pares (x, y) para los cuales la fórmula tiene sentido.*

Definición 1.4 (Gráfica de una función) La representación geométrica de la función $z = f(x, y)$ en el sistema de coordenadas rectangulares $Oxyz$, en general, es una superficie del espacio.

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{D}\} \quad \text{o bien} \quad \mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y))\}$$

Definición 1.5 (Funciones de más de dos variables) Las funciones de tres o más variables se definen de manera análoga a como se han definido las funciones de dos variables.

$$\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R} \quad \text{o bien} \quad f: \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \quad \text{siendo} \quad w = f(x, y, z, \dots, t)$$

1.1.2 Curvas de nivel:

Definición 1.6 (Curvas de nivel) Las curvas de nivel son el conjunto de puntos del dominio donde la función es constante, las curvas de altura constante sobre la gráfica de la función. La ecuación de las curvas de nivel viene determinada por $f(x, y) = C$

Para determinar, en general, la ecuación de la familia de curvas de nivel, suponemos que z es constante dentro de la ecuación: $f(x, y) = z$. Asignando a z diferentes valores obtendremos diferentes curvas de nivel.

Definición 1.7 (Superficies de nivel) Si la función es de tres variables, las superficies de nivel vendrán determinadas por la ecuación $f(x, y, z) = C$

Ejemplo 1.1 Hallar el campo de definición de las funciones:

$$(a) \quad z = a^2 - x^2 - y^2 \quad (b) \quad z = \frac{1}{a^2 - x^2 - y^2} \quad (c) \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Solución:

- (a) Al tratarse de un polinomio, la función está definida para cualquier par de valores (x, y) , luego el dominio de la función es todo \mathbf{R}^2
- (b) Para que la función esté definida el denominador ha de ser distinto de cero, es decir, $a^2 - x^2 - y^2 \neq 0$, o bien $x^2 + y^2 \neq a^2$, o sea, el campo de definición de la función dada es todo el plano a excepción de la circunferencia de radio a y centro en el origen de coordenadas.
- (c) Para que la función esté definida el radicando ha de ser positivo o cero, es decir, $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, o bien $x^2 + y^2 \leq a^2$, o sea, el campo de definición de la función dada es un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas incluyendo la circunferencia frontera.

Ejemplo 1.2 Hallar el campo de definición de la función $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y^2}}$.

Solución: Para que la función esté definida tiene que ser $x - y^2 > 0$, o sea, $x > y^2$. El campo de definición de la función es la región del plano situada en el interior de la parábola $x = y^2$, excluida la parábola frontera.

Ejemplo 1.3 Hallar el campo de definición de la función $f(x, y) = \arcsen(x/y^2)$.

Solución: Para que la función esté definida tiene que ser $y \neq 0$ y $-1 \leq x/y^2 \leq 1$, o sea, $-y^2 \leq x \leq y^2$. El campo de definición de la función es la región del plano comprendido entre las parábolas $x = y^2$ y $x = -y^2$, incluidas ambas parábolas y excluido el punto $O(0, 0)$.

Ejemplo 1.4 Hallar el campo de definición de la función $f(x, y) = \ln xy$.

Solución: Para que la función esté definida tiene que ser $xy > 0$, en consecuencia x e y han de ser los dos positivos o los dos negativos, luego el campo de definición de la función es la región del plano formada por el primer y tercer cuadrante, excluidos los ejes de coordenadas.

Ejemplo 1.5 Hallar las curvas de nivel de las funciones

$$(a) \quad z = x^2 + y^2 \qquad (b) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Solución:

- (a) Para determinar la familia de curvas de nivel suponemos que z es constante en la ecuación: $x^2 + y^2 = z$ ($z \geq 0$). Asignando a z diferentes valores obtenemos circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas y radio \sqrt{z} .
- (b) Para determinar la familia de curvas de nivel suponemos que z es constante, con lo que resulta la ecuación: $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ ($z \geq 0$), o bien $x^2 + y^2 = z^2$. Asignando a z diferentes valores obtenemos circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas y radio z .

Ejemplo 1.6 Hallar las curvas de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución: Para determinar la familia de curvas de nivel suponemos que $f(x, y, z) = w$ es constante, con lo que resulta la ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 = w$ ($w \geq 0$). Asignando a z diferentes valores obtenemos esferas concéntricas con centro en el origen de coordenadas y radio \sqrt{w} .

1.2 Límite de funciones de varias variables

Definición 1.8 (Límite) Sea la función f definida en un cierto entorno de un punto $P(x_0, y_0)$ excepto, quizás, en el propio punto P .

El número l se denomina límite de la función f en el punto $P(x_0, y_0)$ si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todos los puntos $X(x, y)$ del entorno de P y diferentes de P que satisfagan la condición $0 < d(X, P) < \delta$ es válida la desigualdad $|f(X) - l| < \varepsilon$.

En este caso escribimos:

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = l \quad \text{o bien} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$

Teorema 1.1 (de acotación) Si una función tiene límite cero en un punto y otra está acotada en los alrededores del punto, entonces su producto también tiene límite cero en dicho punto.

Teorema 1.2 (Infinitésimos) Si un infinitésimo está multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.

Cuando un infinitésimo está sumando o restando, en general, no se puede sustituir por otro equivalente.

Teorema 1.3 (límites laterales) Se supone que el punto X puede tender al punto P por cualquier ley, cualquier dirección $y = g(x)$, y todos los valores límites obtenidos por estas direcciones deben ser iguales al límite doble l , caso de que exista. Así, si para dos direcciones diferentes obtenemos diferentes valores límites, entonces el límite doble no existe.

Teorema 1.4 (límites parciales iterados) *Se pueden calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \neq x_0}} f(x, y) \right) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \neq y_0}} f(x, y) \right)$$

Si estos dos límites son distintos, entonces la función no tiene límite, pero si son iguales o alguno de ellos no existe, entonces no se puede asegurar nada sobre el límite doble.

Definición 1.9 (Continuidad) *Una función se dice que es continua en un punto, si el valor que toma la función en el punto coincide con el límite en dicho punto.*

Ejemplo 1.7 *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Solución:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0 \cdot \text{Acotado} = 0$$

Ejemplo 1.8 *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Solución: Aproximándonos al punto $(0, 0)$ mediante las parábolas $y = mx^2$, resulta:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \stackrel{y=mx^2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m x^4}{(1 + m^2) x^4} = \frac{m}{1 + m^2} = f(m)$$

luego el límite no existe.

Ejemplo 1.9 *Calcular, si existe, el valor del siguiente límite:* $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y + e^x - 1}{y + x}$

Solución: Si nos aproximamos al punto $(0, 0)$ mediante rectas $y = mx$ obtenemos que el límite, de existir, debería valer 1. Pero ésto no nos permite afirmar que dicho límite exista.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y + e^x - 1}{y + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx + e^x - 1}{mx + x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, con lo cual

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m + e^x}{m + 1} = \frac{m + 1}{m + 1} = 1 \quad \text{para } m \neq -1$$

sin embargo, si nos aproximamos al punto $(0, 0)$ mediante la parábola $y = x^2 - x$ resulta que el límite, de existir, debería valer $3/2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y + e^x - 1}{y + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + e^x - 1}{x^2 - x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + e^x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

y al ser de una variable podemos aplicar L'Hôpital, con lo cual

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1 + e^x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + e^x}{2} = \frac{3}{2}$$

Con lo cual podemos afirmar que el límite propuesto no existe.

Hemos utilizado la parábola $y = x^2 - x$ y no otra, por la siguiente razón. Supongamos que nos acercamos al punto $(0, 0)$ mediante la curva $y = g(x)$, y que aplicamos sucesivamente L'Hôpital, y queremos que resulte

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + e^x - 1}{g(x) + x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^x}{g'(x) + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) + e^x}{g''(x)} \neq 1$$

Para ello tendrá que ser

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = -1, \quad g''(0) \neq 0$$

que se consigue con

$$g''(x) = 1 \rightarrow g'(x) = x - 1 \rightarrow g(x) = x^2 - x$$