ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico Nº 5
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. Añadimos establecer si la matriz A es diagonalizable, y en caso de serlo indicar una matriz P que permita factorearla como $A = P D_A P^{-1}$ siendo D_A diagonal.

i) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda - 4)(\lambda - 16)$, de donde $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 16$ son sus autovalores, con autoespacios asociados $S_1 = \{ x \in R^2 / 2x_1 - x_2 = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ 2)^T \}$, $S_2 = \{ x \in R^2 / x_1 + x_2 = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ {-1})^T \}$. A es diagonalizable, $D_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

ii) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2$, de donde $\lambda_1 = 0$ es autovalor (doble), siendo su correspondiente autoespacio asociado $S_1 = \{ x \in R^2 / x_1 - x_2 = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ 1)^T \}$. A no es diagonalizable.

iii) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$, de donde $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ son sus autovalores, siendo sus autoespacios asociados $S_1 = \{ x \in C^2 / x_1 + i x_2 = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ i)^T \}$, $S_2 = \{ x \in C^2 / i x_1 + x_2 = 0 \} = \text{gen}\{ (i\ 1)^T \}$. A es diagonalizable, $D_A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

Para el caso K=R, la matriz no tiene autovalores (reales) y en consecuencia, no tiene autovectores.

iv) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + \lambda + 1)$, de donde $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $S_1 = \text{gen}\{(1\ 0\ 0)^T\}$, $S_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{pmatrix}^T\right\}$, $S_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{pmatrix}^T\right\}$. A es diagonalizable,

$$D_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & -1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}, P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1-\sqrt{3}i & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

v) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 20\lambda + 64) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 16)$, de donde $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 16$ son sus autovalores, y sus autoespacios asociados resultan $S_1 = \text{gen}\{ (-2\ 1\ 0\ 0)^T \}$, $S_2 = \text{gen}\{ (1\ 0\ 0\ 0)^T \}$, $S_3 = \text{gen}\{ (0\ 0\ 1\ 2)^T \}$, $S_4 = \text{gen}\{ (0\ 0\ 1\ {-1})^T \}$. A resulta diagonalizable,

$$D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a. $\lambda = 0$ es autovalor de A sii existe v no nulo tal que $Av = \lambda v$ sii Nul (A) $\neq \{0\}$ sii A es no inversible.
También se puede considerar: λ es autovalor de A sii $\det(A - \lambda I) = 0$; luego es 0 autovalor de A sii $\det(A) = 0$, sii A es singular.
b. $rg(A) = k < n$ sii A es singular, y por a. sii 0 es autovalor de A y su correspondiente autoespacio no es otro que Nul (A), cuya dimensión es $n - k$.

3. $\lambda_1 = -2$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 2, $S_1 = \{ x \in R^3 / \; 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \} = \text{gen}\{(1\ -2\ 0)^T, (0\ 3\ 1)^T\}$, $\lambda_2 = 6$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 1, $S_2 = \text{gen}\{(2\ 1\ -1)^T$.

A es diagonalizable y $D_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda^3 - 20\lambda^2 + 132\lambda - 288) = -(\lambda - 6)^2(\lambda - 8)$, de donde $\lambda_1 = 6$ de multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1, $S_1 = \text{gen}\{(1\ 1\ -1)^T\}$, y $\lambda_2 = 8$, $S_2 = \text{gen}\{(1\ -1\ 0)^T$.
A no es diagonalizable.

5. Basta ver que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$, siendo $S_i = \text{Nul}(A - a_{ii} I)$.

6. a)Es inmediato si admitimos el resultado: *si* $A \in K^{n\,x\,n}$, *con* $A = \begin{pmatrix} B & D \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$, $B \in K^{k\,x\,k}$, $C \in K^{s\,x\,s}$,

$\mathbf{0} \in K^{s\,x\,k}$, $k + s = n$ *entonces es* $\det(A) = \det(B)\ \det(C)$
b) usar a)
c) considerando $v = [\, v_1^T\ v_2^T]^T$, donde v_1 tiene k componentes y v_2, (n-k) componentes, $v \in S_\lambda$ (de A) $\Leftrightarrow$ $v_1 \in S_\lambda$ (de A_{11}) y $v_2 \in S_\lambda$ (de A_{22})

7. Se aplica el punto c. del ejercicio anterior para utilizar los resultados de 1.b y 3, y así $\lambda_1 = -2$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 2, $S_1 = \{ x \in R^5 / \; 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 = x_4 = x_5 \} = \text{gen}\{(1\ -2\ 0\ 0\ 0)^T, (0\ 3\ 1\ 0\ 0)^T\}$, $\lambda_2 = 1$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 1, $S_2 = \text{gen}\{(2\ 1\ -1\ 0\ 0)^T$, $\lambda_3 = 0$ (de multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1), $S_3 = \{ x \in R^5 / \; x_1 = x_2 = x_3 = 0 = x_4 + x_5 \} = \text{gen}\{ (0\ 0\ 0\ 1\ -1)^T \}$. A no es diagonalizable.

8.
$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n-1} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \ldots & A_{2n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{n-1n-1} \end{pmatrix} \det(A_{nn}) = \prod_{1}^{n} \det(A_{ii}),$$
resultado que se puede obtener según la propiedad enunciada en ej. 6 razonando inductivamente.

9. Sea $\dim(S_\lambda) = \mu$ y $B = \{ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_\mu}, \mathbf{v_{\mu+1}}, \ldots, \mathbf{v_n} \}$ una base de K^n con $\{ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_\mu} \}$ base de S_λ y definamos $P \in K^{n\,x\,n}$ tal que su i-ésima columna es $\mathbf{v_i}$, de modo que la i-ésima columna de AP es A $\mathbf{v_i}$ e igual a $\lambda\, \mathbf{v_i}$ si $i=1,\ldots,\mu$, o dicho de otro modo A P = P A’, llamando A’ = $\begin{pmatrix} \lambda I_\mu & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$ para ciertas B, C, de donde (pues P es regular por definición) $A' = P^{-1} A P$ y como el polinomio característico de A es igual al de A’ es $\det(A - \alpha I) = \det \begin{pmatrix} (\lambda - \alpha) I_\mu & B \\ \mathbf{0} & C - \alpha I_{n-\mu} \end{pmatrix} = (\lambda - \alpha)^\mu q(\alpha)$ llamando $q(\alpha) = \det(C - \alpha I_{n-\mu})$, lo que indica que λ es raiz de multiplicidad al menos μ..

Recordar que si A y A’ son matrices semejantes tienen igual determinante e igual polinomio caracterís tico pues:
$\det(A') = \det(P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(P^{-1}) \det(P) \det(A) = \det(I) \det(A) = \det(A)$ y

$\det(A' - \alpha I) = \det(P^{-1} A P - \alpha P^{-1} I P) = \det(P^{-1}) \det(A - \alpha I) \det(P) = \det(P^{-1}) \det(P) \det(A - \alpha I) = \det(I) \det(A - \alpha I) = \det(A - \alpha I)$.

10. Los autovalores no dependen de k , son $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = 1$, $S_2 = \text{gen}\ \{ (k-1\ \ -1\ \ 1)^T \}$. Para $k \neq 0$ es $S_1 = \text{gen}\ \{ (1\ \ 0\ \ 0)^T \}$ (y entonces λ_1 de multiplicidad geométrica 1 y A resulta no diagonalizable), y para $k = 0$ es $S_1 = \text{gen}\ \{ (1\ \ 0\ \ 0)^T , (0\ \ 1\ \ 0)^T \}$ (esto es, λ_1 de multiplicidad geométrica 2 y A resulta diagonalizable).

11. A lo sumo k (pues al menos $n-k$ son nulos, ver Ej 2b. y Ej.9).
Proponer un ejemplo donde haya menos que k.

12. $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 2, $S_1 = \{ x \in R^3 \,/\, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \} = \text{gen}\ \{(1\ 1\ 0)^T, (0\ 2\ 1)^T \}$, $\lambda_2 = 2$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 1, $S_2 = \text{gen}\ \{(1\ 1\ 1)^T \}$. A es diagonalizable.

13. a. Se tiene que $\exists\, \mathbf{v}$ no nulo en K^n tal que $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} \Rightarrow r\,(A\,\mathbf{v}) = r(\lambda\,\mathbf{v}) \Rightarrow (r\,A)\,\mathbf{v} = (r\,\lambda)\,\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}$ no nulo
Vale la recíproca?

b. Razonando inductivamente sobre k , para $k = 1$ es que $\exists\, \mathbf{v}$ no nulo en K^n tal que $A^1\,\mathbf{v} = \lambda^1\,\mathbf{v}$ que es precisamente lo supuesto; luego para *el mismo* $\mathbf{v}$ es $A^k\,\mathbf{v} = (A\,A^{k-1})\,\mathbf{v} = A\,(A^{k-1}\,\mathbf{v}) = A\,(\lambda^{k-1}\,\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}\,(A\,\mathbf{v}) = \lambda^{k-1}\,(\lambda\,\mathbf{v}) = (\lambda^{k-1}\,\lambda)\,\mathbf{v} = \lambda^k\,\mathbf{v}$.

Es fundamental observar que también se ha probado que el vector que sirve de autovector para A *también oficia de autovector* para A^k, de modo que se puede concluir que si A es diagonalizable, también lo es A^k. ¿La recíproca es válida?.

c. A es inversible sii $\det(A) \neq 0$ sii (ver Ej. 2.a) todo autovalor $\lambda \neq 0$, luego se tiene el resultado premultiplicando por $\lambda^{-1} A^{-1}$ en $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$.

d. Es $(A + r\,I)\,\mathbf{v} = A\,\mathbf{v} + r\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v} + r\,\mathbf{v} = (\lambda + r)\,\mathbf{v}$, con $\mathbf{v}$ el *mismo* autovector de A.

14. Se trata de la matriz $A + r\,I$, con A la matriz cuyos elementos son todos 1, con autovalores $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) $n-1$, $S_1 = \{ x \in R^n \,/\, \sum x_i = 0 \}$, $\lambda_2 = \text{tr}\,(A) = n$ de multiplicidad (algebraica y geométrica) 1, $S_2 = \text{gen}\ \{(1\ 1\ \ldots\ 1)^T\} = [S_1]^{\perp}$. Luego los autovalores de $A + r\,I$ son $\mu_1 = r$ y $\mu_2 = n + r$ con multiplicidades algebraicas y geométricas $n-1$ y 1, y autoespacios S_1 y S_2 respectivamente.

15. Suponiendo conocido los resultados: *el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta (i.e. el de la adjunta(adjunta de A = A^H) es igual a su conjugado), la adjunta de una suma de matrices es la suma de sus adjuntas*, basta considerar, notando p al polinomio característico de A y q al de A^H , que se obtiene $p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda\,I) = \overline{\det\,(A - \lambda\,I)^H} = \overline{q\,(\overline{\lambda})}$; por otra parte *rango* $(A - \lambda\,I)$ = *rango* $(A - \lambda\,I)^H$ = *rango*$(A^H - \overline{\lambda}\,I)$, de donde (¿por qué?) resulta la igualdad de las multiplicidades geométricas entre el autoespacio de A asociado a λ y el autoespacio de A^H asociado a $\overline{\lambda}$.

16. Basta ver :

$$[p(A)]\,\mathbf{v} = \left[\sum_0^k a_i\,A^i\right]\mathbf{v} = \sum_0^k a_i\,(A^i\mathbf{v}) = \sum_0^k a_i\,(\lambda^i\,\mathbf{v}) = \left[\sum_0^k a_i\,\lambda^i\right]\mathbf{v} = p(\lambda)\,\mathbf{v}$$ con

la primera y última igualdad por definición del polinomio, la segunda por distributividad del producto matricial respecto de la suma, la tercera por el Ej. 13. b., la cuarta por asociatividad del producto de escalares y distributividad del producto de escalares por matrices

Se vuelve a observar que, además de lo probado, resulta que el mismo autovector de A es autovector de p(A).

17. Llamando $q(t)=\sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i$, $r(t)=\sum_{j=0}^{n} b_j\, t^j$ es

$$p(t)=\left[\sum_{i=0}^{m} a_i\, t^i\right]\left[\sum_{j=0}^{n} b_j\, t^j\right]=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\ a_i\, b_j\, t^{i+j}$$ de donde

$$p(A)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\ a_i\, b_j\, A^{i+j}\ =\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\ a_i\, b_j\, A^i\ A^j\ =\sum_{i=0}^{m} a_i\ A^i \sum_{j=0}^{n} b_j A^j\ = q(A)\, r(A)\ .$$

18. Es λ autovalor de p (A) sii det [p (A) – λ I] = 0 sii det [q (A)] = 0 sii q (A) es singular; el segundo paso se sigue del Ej. 17, para el tercero basta ver que $\det[q(A)]=(a_k)^n \prod_i \det(A-\nu_i I)=0$ sii para algún i^* se anula el determinante, de modo que ν_{i^*} es un autovalor de A además de ser raíz de q , es decir p (ν_{i^*}) $-\lambda = 0$.

19. Como los autovalores de A son 6y 8, los de p(A) son p(6), y p(8), o sea, 271y 611, *con los mismos autoespacios originales*.

20. Como los autovalores de A son –2 y 6, los de p(A) son p(–2) y p(6), o sea, 4*r*–9, y *r*, y como se quiere que $0\notin\{4r-9,\ 36r+215\}$, debe ser $r \neq -215/36$ y $r \neq 9/4$.

21. Si $\exists$ **v** no nulo en K^n tal que A **v** = λ **v** $\wedge$ $A^2 = A \Rightarrow \lambda$ **v** = A **v** = A^2 **v** = λ^2 **v** $\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$.

22. $a.\, D_A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}; P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}; b.\, D_A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}; P=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}; c.\, D_A=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}; P=\begin{pmatrix}1&i\\3i&1\end{pmatrix}$

.

23. Resuelto en 1.c.

24. No, pues 2 es autovalor doble con multiplicidad geométrica 1.

25. Resuelto en su correspondiente lugar.

26. a. Los autovalores de A son $2\alpha + 4$, $4-\alpha$ y $4-\alpha^2$. En el caso que estos 3 autovalores sean diferentes, A resulta diagonalizable. Analizaremos pues la diagonalización de A en el caso de autovalores múltiples.
Supongamos que A tenga un autovalor triple, esto es, sea α tal que $2\alpha + 4 = 4-\alpha = 4-\alpha^2$. Resulta entonces que debe ser $\alpha = 0$, para el que corresponde autovalor $\lambda = 4$ triple, siendo su multiplicidad geométrica (pruébese) 2. Por lo tanto, en este caso A no es diagonalizable.
En el caso que A tenga una autovalor doble, consideramos 3 posibilidades. En primer lugar, si $4-\alpha= 4-\alpha^2$ resulta $\alpha = 0$ (ya analizado). En segundo lugar, si $2\alpha + 4 = 4-\alpha^2$, resulta $\alpha = 0$ (ya analizado) o $\alpha = -2$ para el que $\lambda = 3$ es doble con multiplicidad geométrica (pruébese) 2; con lo cual, en este último caso, A es diagonalizable. En tercer lugar si α fuera tal que $2\alpha + 4 = 4-\alpha$ resulta $\alpha = 0$(ya analizado). El resumen final es entonces que A es diagonalizable para todo α no nulo.

b. (α=1): $D_A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (α=2) : $D_A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 8 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. VFVFV

28. a. Probemos algo más que el enunciado: $\mathbf{x} \in$ col(A) sii $\mathbf{x} = A\,\mathbf{x}$. Es claro que si $\mathbf{x} = A\,\mathbf{x}$ entonces (¿porqué?) $\mathbf{x} \in$ col(A); ahora el recíproco, si $\mathbf{x} \in$ col(A) existe $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{x} = A\mathbf{y} = A^2\,\mathbf{y} = A\,(A\,\mathbf{y}) = A\,\mathbf{x}$.

b. Veamos en primer lugar que K^n =col(A)+Nul(A). Para esto, consideremos que para cualquier $\mathbf{x}$ en K^n se verifica $\mathbf{x} = A\,\mathbf{x} + (\mathbf{x} - A\,\mathbf{x})$, con el primer vector en col (A), mientras que el segundo está en Nul (A) (pues $A\,(\mathbf{x} - A\,\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} - A^2\,\mathbf{x} = A\,\mathbf{x} - A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Veamos ahora, por otra parte, que si $\mathbf{v}$ pertenece a la intersección de col (A) y Nul (A) es $\mathbf{v} = A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y entonces col (A) $\cap$ Nul (A) = { $\mathbf{0}$ }.

c. Siendo B_{Nul} [B_{col}] una base del Nul (A) [respectivamente de Col (A)] es (¿por qué?) $B = B_{col} \cup B_{Nul}$ una base de K^n con cada uno de sus vectores autovector de A (asociados al autovalor 1 los de B_{col} , al autovalor 0 los de B_{Nul}).

d. P es la matriz que tiene por columnas los vectores de la base B.

b. Si se toma B_{Nul} [B_{col}] una BON del Nul (A) [respectivamente de Col (A)], $B = B_{col} \cup B_{Nul}$ será una BON de K^n siempre que los vectores de Col (A) sean ortogonales a los de Nul (A), pero esto es precisamente lo que sucede pues A es hermítica (K=C) o simétrica (K=R). Observemos entonces que si A es idempotente y hermítica (o sea matriz de proyección ortogonal) el espacio columna es el complemento ortogonal del espacio nulo (con producto interno canónico) pues si $\mathbf{x} \in$Col (A), $\mathbf{y} \in$Nul (A) es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^H\,\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^H\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^H\,A^H\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^H\,A\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

29. FVVV

30. a. Los autovalores de T son $\lambda_1 = 2$ (doble), $\lambda_2 = -1$, siendo S_1 = gen { $(1\ 1\ 0)^T$, $(1\ 0\ -1)^T$ }, S_2 = gen { $(1\ -1\ 1)^T$ }, $[T]_B$ es diagonal con B = { $(1\ 1\ 0)^T$, $(1\ 0\ -1)^T$, $(1\ -1\ 1)^T$ }.

b. Los autovalores de T son $\lambda_1 = 2$ (simple), siendo S_1 = gen {p(t) = 1}, T no es diagonalizable. (K = R).
c. Si K = R, T no tiene autovalores; si K = C , los autovalores de T son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, siendo $S_{1,2}$ = gen {$\mathbf{v_1} \pm i\mathbf{v_2}$ }. $[T]_B$ es diagonal con B = { $\mathbf{v_1} + i\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_1} - i\mathbf{v_2}$ }.

d. Los autovalores de T son $\lambda_1 = -1$ (cuádruple)}, S_1 = gen {p(t) = 1, q(t) = t}. T no es diagonalizable.

31. Los autovalores de T son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = -1$ y T sólo es diagonalizable para α = 0, en cuyo caso los autoespacios son S_1 = gen { v_1+2v_2, v_1+2v_3}, S_2 = gen { v_2+v_3 }, $[T]_{B^*}$ es diagonal con B* = { v_1+2v_2 , v_1+2v_3 , v_2+v_3 }.

32. a. Si $\exists\, \mathbf{v}$ no nulo en V y λ en K tal que $T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v} \wedge T^2 = I \Rightarrow \mathbf{v} = T^2(\mathbf{v}) = \lambda^2\,\mathbf{v} \Rightarrow 1 = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$.

b. Observar que si $\mathbf{v} \in S_1 \cap S_2$ es $-\mathbf{v} = T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ de modo que $S_1 \cap S_2 = \{ \mathbf{0}_V \}$. Por otra parte, $\forall\, \mathbf{v} \in V$ podemos escribir $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{u} = ½\,[\mathbf{v} + T(\mathbf{v})]$, $\mathbf{w} = ½\,[\mathbf{v} - T(\mathbf{v})]$. Además T($\mathbf{u}$)=

$T[\tfrac12 [\mathbf{v} + T(\mathbf{v})]] = \tfrac12 [T(\mathbf{v}) + T^2(\mathbf{v})] = \mathbf{u}$, es decir $\mathbf{u} \in S_1$, mientras que $T(\mathbf{w}) = T[\tfrac12 [\mathbf{v} - T(\mathbf{v})]] = \tfrac12 [T(\mathbf{v}) - T^2(\mathbf{v})] = -\mathbf{w}$, es decir $\mathbf{w} \in S_2$. Con esto, probamos que $V=S_1+S_2$.

c. Siendo B_1 [B_2] una base de S_1 [respectivamente de S_2] es (¿por qué?) $B = B_1 \cup B_2$ una base de V con cada uno de sus vectores autovector de A (asociados al autovalor 1 los de B_1 , al autovalor –1 los de B_2).

d. $\{\dim S_1 = 0 \wedge \dim S_2 = 5\}$ ó $\{\dim S_1 = 2 \wedge \dim S_2 = 3\}$ó$\{\dim S_1 = 4 \wedge \dim S_2 = 1\}$.

33. Es obvio, sin operación alguna, que los autovalores de T son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = -2$, siendo $S_1 = [\text{gen } \{\mathbf{u}\}]^{\perp}$, $S_2 = \text{gen } \{\mathbf{u}\}$. T es diagonalizable.

Interpretar geométricamente mediante un dibujo y probar detalladamente que $T(\mathbf{u}) = -2\mathbf{u}$, mientras que para cualquier vector $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{u}$ se tiene que $T(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$. Naturalmente , en una adecuada base (¿cuál precisamente?) es $[T]_B = \text{diag}(1, 1, -2)$.

34. Añadimos algo de generalidad al enunciado cambiando R^3 por C^n con $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \alpha \dfrac{\mathbf{u}\,\mathbf{u}^H}{\mathbf{u}^H\mathbf{u}}\mathbf{v}$, permitiendo que α sea un cualquier número complejo. Si es $\alpha = 0$, es T = I, y los autovalores de T son $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad *n*), y $S_1 = C^n$. Luego consideremos que sea $\alpha \neq 0$, y entonces (¡pruébese!) se tiene que los autovalores de T son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \alpha$, $S_1 = [\text{gen } \{\mathbf{u}\}]^{\perp}$, $S_2 = \text{gen } \{\mathbf{u}\}$ y T es diagonalizable. [*En particular para $\alpha = -1$, T es una proyección (¿sobre qué?), mientras que para $\alpha = -2$, T es una reflexión (¿sobre qué?)*]
Incluso este ejercicio se puede generalizar aún más reemplazando $(\mathbf{u}\mathbf{u}^H/\mathbf{u}^H\mathbf{u})$ por P, donde P es la matriz de proyección sobre un subespacio S de C^n.

35. Un invariante unidimensional está necesariamente generado por un autovector (¿por qué?, ¿es ésto verdadero para un invariante no unidimensional?), de modo que conocemos la matriz P y D_A (indirectamente, pues el producto de los tres autovalores debe ser 12 y uno de ellos es 2 (doble, luego el restante es 3), luego sólo se necesita hacer $A = P\, D_A\, P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

36. a. Los autovalores de T son $\lambda_1 = 2$ (doble), $\lambda_2 = 1$; b. $[T]_B = \begin{pmatrix} 14 & 66 & -42 \\ 4 & 24 & -14 \\ 10 & 55 & -33 \end{pmatrix}$

37. Basta ver que no comparten su traza.(suponiendo conocido el resultado que matrices semejantes tienen igual traza)

38. Una forma es determinar una X inversible que resuelva el sistema AX = XB.
Otra forma es usar que si $A=PDP^{-1}$ y $B=MDM^{-1}$, donde D es diagonal, entonces $PM^{-1}BMP^{-1} = A$.
Luego basta definir $S=PM^{-1}$.

39. a. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A^k = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

40. $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; no es única

Proponer otra, ¿cuántas hay?. En general, el problema de hallar A tal que $A^2=B$, ¿tiene siempre solución?, ¿cuántas?

41. $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(tener en cuenta ej. 18)

42. Siendo $\mathbf{v_1} = (1\ -1)^T$ y $\mathbf{v_2} = (1\ 1)^T$ los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$ respectivamente, se tiene para cualquier $\mathbf{v} = \alpha\, \mathbf{v_1} + \beta\, \mathbf{v_2}$ en R^2 que $A^k\, \mathbf{v} = \alpha\, \mathbf{v_1} + 3^k\, \beta\, \mathbf{v_2}$, resultando entonces que no existe el límite a menos que **v** sea múltiplo de $\mathbf{v_1}$ (y en tal caso el límite es $\alpha\, \mathbf{v_1}$).

Recordar que se dice que la sucesión $\{A^k v\}$ tiene límite u sii $\lim_{k\to\infty} \left\|A^k v-u\right\|=0$. O más generalmente, si $\{x_k\}$ es una sucesión de vectores, $\lim_{k\to\infty} x_k= x$ sii $\lim_{k\to\infty} \left\|x_k - x\right\| = 0$.

43. S = gen $\{ (4\ 2\ 1)^T\}$, autoespacio correspondiente al autovalor ½ verifica lo pedido. (¿hay otro?).

44. Es claro que el conjunto S contiene al vector nulo de C^n (pues $\| A^k\mathbf{0} - \mathbf{0} \| =0$ para cualquier k). Además si $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in S$ y $\alpha \in C$, resulta que, como $\| A^k (\alpha\, \mathbf{z} + \mathbf{w}) \| \le |\alpha|\ \| A^k\mathbf{z} \| + \| A^k\mathbf{w} \|$, si $\| A^k\mathbf{z} \| \to 0$ y $\| A^k\mathbf{w} \| \to 0$, para $k \to \infty$, entonces $\| A^k (\alpha\, \mathbf{z} + \mathbf{w}) \| \to 0$ cuando $k \to \infty$, de modo que $\alpha\, \mathbf{z} + \mathbf{w}$ pertenece a S.

Con las observaciones anteriores probamos que S es un subespacio de C^n. Ahora, para probar que es invariante, sea **u** un elemento de S (esto es, $\| A^k\mathbf{u} \| \to 0$ cuando $k \to \infty$.), entonces $A\mathbf{u}$ también pertenece a S puesto que $\| A^k (A\mathbf{u}) \| = \| A^{k+1}\, \mathbf{u} \| \to 0$, cuando $k \to \infty$.

Por último, S es el subespacio generado por los autovectores asociados a autovalores de módulo menor que 1.(Una parte de la prueba es simple, pues si S es tal como se dice, para cualquier **x** de S es $\mathbf{x} = \Sigma\, \alpha_i\, \mathbf{v}_i$ con $A\, \mathbf{v}_i = \lambda_i\, \mathbf{v}_i$ siendo $| \lambda_i | < 1$ y entonces $A^k\, \mathbf{x} = \Sigma\, \alpha_i\, (\lambda_i)^k\, \mathbf{v}_i$ de donde $\| A^k (\mathbf{x}) \| \le \Sigma\, |\alpha_i|\ | \lambda_i |^k\ \|\mathbf{v}_i \|$ y de allí (detallar) $A^k (\mathbf{x}) \to \mathbf{0}$ (para $k \to \infty$); resta ahora ver que para todo vector **x** (hacerlo) que no pertenece a S se verifica $A^k (\mathbf{x})$ no tiende a **0**, cuando $k \to \infty$.

45. $A = P\, D_A\, P^{-1}$, $p\,(A) = P\ p\,(D_A)\, P^{-1}$(para cualquier polinomio p) y teniendo en cuenta que el i-ésimo elemento de la diagonal de $p\,(D_A)$ no es sino $p\,(\lambda_i)$ se tiene el resultado. (detallar, justificar).