Álgebra II, FIUBA

Segundo Cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del Trabajo Práctico Nro 4

(por Fernando Acero con la colaboración de J.L. Mancilla Aguilar)

1. Son transformaciones lineales, es decir, se verifica $\forall\alpha \in K$ y $\forall x, y \in V$ $T(\alpha x) = \alpha x$ y $T(x + y) = T(x) + T(y)$, las definidas en (a), (c) con $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio y (d); se descartan (b), pues no transforma el nulo en sí mismo, y (c) con $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio, pues $T(i \cdot 1) = -i \neq iT(1)$.

2. En este ejercicio usamos la siguiente definición de transformación lineal: $T : V \to W$ es lineal sii $\forall\alpha \in K$ y $\forall x, y \in V$, $T(x + y) = T(x) + T(y)$ y $T(\alpha x) = \alpha x$.

   Es inmediato verificar que T verifica la definición de transformación lineal si se cumple $\forall\alpha, \beta \in K$ y $\forall x, y \in V$ $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, basta para ello considerar los casos: i) $\beta = 0$ y ii) $\alpha = \beta = 1$.

   Recprocamente, si T es lineal, tenemos, aplicando la definición, que $T(\alpha x+\beta y) = T(\alpha x)+T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.

3. (a) Aplicando propiedades del producto matricial (enúncielas) y el ej. 2, tenemos que $\forall\alpha, \beta \in K$ y $\forall x, y \in V$, $T(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
   (b) Usando propiedades del producto de polinomios (enunciar): $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$: $T(\alpha p + \beta q) = (t^2 + 1)(\alpha p + \beta q) = \alpha[(t^2 + 1)p] + \beta[(t^2 + 1)q] = \alpha T(p) + \beta T(q)$.
   (c) En primer lugar note que el codominio de T es $\mathbb{C}\,[a, b]$ debido a que el producto de funciones continuas es una función continua. La linealidad se demuestra empleando propiedades del producto de funciones, y es análoga a la de (b).
   (d) Es inmediata.
   (e) Es consecuencia inmediata de la linealidad de la derivada: $(\alpha f)' = \alpha f'$ y $(f + g)' = f' + g'$. Desarrollar.
   (f) Aplique propiedades del producto matricial.

4. Veamos sólo (d). Sean $\alpha, \beta \in K$ y $x, y \in V$. Entonces

   $$\begin{aligned}(S \circ T)(\alpha x + \beta y) = S[T(\alpha x + \beta y)] &= S[\alpha T(x) + \beta T(y)] \\ &= \alpha S[T(x)] + \beta S[T(y)] = \alpha(S \circ T)(x) + \beta(S \circ T)(y),\end{aligned}$$

   la primera (última) igualdad por definición de composición, la segunda (tercera) por la linealidad de T (de S).

5. i) Dilatación (contracción) de intensidad k, con $k > 1$ (con $0 < k < 1$), identidad con $k = 1$, nula con $k = 0$, simetría central con $k = -1$, dilatación seguida de simetría central para $k < -1$, contracción seguida de simetría central para $-1 < k < 0$; en cualquier caso el cuadrado unitario se transforma en un cuadrado de lado $|k|$, con vértices $(0\ 0)^T; (0\ k)^T; (k\ 0)^T; (k\ k)^T$.
   ii) Reflexión respecto del eje $x = \text{gen}\{(1\ 0)^T\}$.
   iii) Proyección sobre el eje $y = \text{gen}\{(0\ 1)^T\}$ para $k = 0$, reflexión sobre el eje $y = \text{gen}\{(0\ 1)^T\}$ para $k = -1$, etc., siendo el transformado un rectángulo de base $|k|$ (posiblemente nula) y altura 1.
   iv) Rotación antihoraria de intensidad α, siendo el transformado el cuadrado original α-rotado (respecto del origen).

v) Reflexión respecto de la recta $\mathcal{L} = \text{gen}\{(1\ \ -1)^T\}$.
vi) Proyección sobre el eje $x = \text{gen}\{(1\ 0)^T\}$.

6. i) Proyección sobre el eje $x = \text{gen}\{(1\ 0\ 0)^T\}$.
ii) Reflexión respecto del plano $xy = \text{gen}\{(1\ 0\ 0)^T,\ (0\ 1\ 0)^T\}$.
iii) Reflexión respecto del eje $z = \text{gen}\{(0\ 0\ 1)^T\}$.
iv) Rotación (intensidad α) respecto del eje z.
v) La composición de ii) con iv).

7. a) $\text{Nu}(T) = \{(0\ 0)^T\}$; $\text{Im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3 /\ 2y_1+3y_2-y_3 = 0\} = \text{col}(A) = \text{gen}\{(1\ 0\ 2)^T,\ (2\ -1\ 1)^T\}$.
b) $\text{Nu}(T) = \{A \in \mathbb{R}^{2x2} /\ a_{11}-a_{12}+2a_{21}-2a_{22} = 0\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}$.
c) $\text{Nu}(T) = \{p \in \mathcal{P}/\ t^2|p\}$, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ (probarlo).
d) El núcleo se reduce al sev nulo, la imagen es todo el espacio.
e) El núcleo lo integran las funciones lineales, es decir, es el sev generado por $\{1,\ t\}$, y la imagen es todo el espacio.

8. Recordemos que $v_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{S}}v$ sii $v_1 \in \mathcal{S}$ y $v - v_1 \in \mathcal{S}^{\perp}$.

   Sean $\alpha, \beta \in K$ y $u, v \in V$. Sea $w = \alpha\mathcal{P}_{\mathcal{S}}u + \beta\mathcal{P}_{\mathcal{S}}v$. Entonces $w \in \mathcal{S}$ y $(\alpha u+\beta v)-w = \alpha(u-\mathcal{P}_{\mathcal{S}}u) + \beta(v - \mathcal{P}_{\mathcal{S}}v) \in \mathcal{S}^{\perp}$ (justificarlo). Luego $w = \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(\alpha u + \beta v)$; además es $\text{Nu}(\mathcal{P}_{\mathcal{S}}) = S^{\perp}$ e $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$.

9. Basta explicitar lo que es Núcleo e Imagen.

10. a) $B_{\text{Nu}} = \{(1\ 0\ 0\ \ -11\ \ -7)^T,\ (0\ 1\ 0\ \ -22\ \ -14)^T,\ (0\ 0\ 1\ \ -14\ \ -9)^T\}$; $B_{\text{Im}} = \{(1\ 3\ 4\ \ -2)^T,\ (1\ 4\ 5\ \ -3)^T\}$.
b) Con cuerpo de escalares $\mathbb{C}$: $B_{\text{Nu}} = \{(i\ 1\ 0)^T,\ (i\ 0\ 1)^T\}$, $B_{\text{Im}} = \{(1\ 2i)^T\}$.
b) Con cuerpo de escalares $\mathbb{R}$: $B_{\text{Nu}} = \{(i\ 1\ 0)^T,\ (i\ 0\ 1)^T,\ (-1\ i\ 0)^T,\ (-1\ 0\ i)^T\}$, $B_{\text{Im}} = \{(1\ 2i)^T, (i\ \ -2)^T\}$.

11. a) Sean $\alpha \in K$ y $x, y \in T(\mathcal{S})$. Entonces existen $x', y' \in \mathcal{S}$ tales que $x = T(x') \wedge y = T(y')$. Luego $\alpha x + y = \alpha T(x') + T(y') = T(\alpha x' + y')$, con lo cual $\alpha x + y \in T(\mathcal{S})$ ya que es imagen a través de T del vector $(\alpha x' + y') \in \mathcal{S}$; como además el $0_W \in T(\mathcal{S})$ ya que $T(0_V) = 0_W$ resulta que $T(\mathcal{S})$ es un sev de W.
b) Sean $\alpha \in K$ y $x, y \in T^{-1}(\mathcal{S}')$. Entonces $x' = T(x) \in \mathcal{S}'$, $y' = T(y) \in \mathcal{S}'$. Como $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) = \alpha x' + y' \in \mathcal{S}'$, $(\alpha x + y) \in T^{-1}(\mathcal{S}')$; como además $T(0_V) = 0_W \in S'$, es claro que $0_V \in T^{-1}(\mathcal{S}')$, y entonces queda probado que $T^{-1}(\mathcal{S}')$ es un sev de V.
c) Para cualquier vector y de $T(\mathcal{S})$ existe x en $\mathcal{S}$ tal que $y = T(x)$, y para ese tal x existen r escalares $\alpha_i \in K$ tales que $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ y entonces $y = T(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i T(v_i)$.

12. a) $B_{\text{Nu}} = \{t(t-1),\ t^2(t-1)\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ lo es de la imagen (probarlo).
b) Como el núcleo se reduce al nulo, carece de base, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ sirve como base de la imagen.
c) $B_{\text{Nu}} = \{I_d,\ A\}$, $B_{\text{Im}} \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

13. a) (V) $\{v_i\}$ es l.d. en V sii $\exists j$ tal que $v_j = \sum_{i\neq j} \alpha_i v_i$. Entonces $T(v_j) = \sum_{i\neq j} \alpha_i T(v_i)$ de donde $\{T(v_i)\}$ es l.d. en V.
b) (F), basta ver que la transformación nula convierte cualquier conjunto l.i. en uno l.d.
c) (F), pues es equivalente lógico de b). (Recuerde que la proposición $p \to q$ es verdadera si y sólo si la proposición $\neg q \to \neg p$ es verdadera.)
d) (V), pues es equivalente lógico de a).
e) (V). Observamos primero que, por d), cualquiera sea $\mathrm{Nu}(T)$, $\{T(v_i)\}$ es l.i. en $W \Rightarrow \{v_i\}$ es l.i. en V; ahora, sea el conjunto $\{v_i\}$ l.i., y sea $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i T(v_i) = 0_W$. Entonces, por ser T lineal, $T(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i) = 0_W$, con lo cual $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \in \mathrm{Nu}(T)$. Como $\mathrm{Nu}(T) = \{0_V\}$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0_v$ y, por ser $\{v_i\}$ l.i., concluimos que $\alpha_i = 0$ para todo i y con ello que $\{T(v_i)\}$ es l.i.
f) (V). Sea $x \in \mathrm{Nu}(T)$. Entonces $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow 0_W = T(x) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) \Rightarrow \alpha_i = 0$ para todo i, es decir $x = 0_V$ y por lo tanto $\mathrm{Nu}(T) = \{0_V\}$. (justificar las igualdades e implicaciones).

14. a) (V). Sean v, v' dos soluciones, entonces $T(v) = w = T(v') \Rightarrow T(v - v') = 0_W \Rightarrow v - v' \in \mathrm{Nu}(T) = \{0_V\}$ y entonces $v = v'$. (¿ Dónde se aplicó la hipótesis?).
b) (F) Sea por caso $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 /\ T(x) = (x\ x)^T,\ w = (1\ 0)^T$.
c) (V). Afirmar que la ecuación tiene solución para cada w en W es precisamente admitir que existe v en V tal que $T(v) = w$, o, lo que es lo mismo, que $\mathrm{Im}(T) = W$. Por otra parte, la unicidad de la solución exige la nulidad del núcleo (pues si hubiese un no nulo v en el núcleo existirían dos soluciones distintas de $T(u) = 0_W$, esto es v y el 0_V). Recíprocamente, $\mathrm{Im}(T) = W$ equivale a existencia de solución de $T(v) = w$ para cada w, mientras que de $\mathrm{Nu}(T) = \{0_V\}$ resulta la unicidad de solución por a).
d) (V) Es una paráfrasis del anterior.
e) (F) Ver el ejercicio 7.e.
f) (V) Puede aplicarse el teorema de las dimensiones.
g) (V) Es una paráfrasis del anterior.
h) (V) Por la relación entre las dimensiones de V, $\mathrm{Nu}(T)$ y $\mathrm{Im}(T)$, $\dim[N(T)] = \dim(V) - \dim[\mathrm{Im}(T)] > \dim(W) - \dim[\mathrm{Im}(T)] \geq 0 \Rightarrow T$ no es inyectiva (justifique cada paso).
i) (V) $\dim[\mathrm{Im}(T)] = \dim(V) - \dim[\mathrm{Nu}(T)] < \dim(W) - \dim[\mathrm{Nu}(T)] \leq \dim(W) \Rightarrow T$ no es sobreyectiva (justifique cada paso).
j) (V) Siendo T biyectiva (y por lo tanto $\mathrm{Nu}(T) = \{0_V\}$, $\mathrm{Im}(T) = W$), el teorema de las dimensiones afirma que $\dim(W) = \dim[\mathrm{Im}(T)] = \dim(V) - \dim[\mathrm{Nu}(T)] = \dim(V)$.

15. Recordamos previamente algunas definiciones y resultados: un vector u pertenece a $\mathrm{col}(A)$ sii $u = Ax$ para algún x ; cada columna de BA es una c.l. de las columnas de B (y también cada fila de BA es una c.l. de las filas de A); el rango de A es la dim de $\mathrm{col}(A)$ (o de $\mathrm{fil}(A)$, que es la misma).
a) $\forall u \in \mathrm{col}(BA)\ \exists x \in \mathbb{C}^m$ tal que $u = (BA)x = B(Ax)$, luego $u \in \mathrm{col}(B)$, pues existe $y = Ax$ tal que $u = By$, es decir $\mathrm{col}(BA) \subset \mathrm{col}(B)$. (Observación: también vale que $\mathrm{fil}(BA) \subset \mathrm{fil}(A)$, probarlo.)
b) Como por a) es $\mathrm{col}(BA) \subset \mathrm{col}(B)$, sólo debemos probar que $\mathrm{col}(BA) \supset \mathrm{col}(B)$: $\forall u \in \mathrm{col}(B)\ \exists x \in \mathbb{C}^n$ tal que $u = Bx$ y para tal x hallamos $y \in \mathbb{C}^m$ con $Ay = x$ (¿ porqué puede asegurarse que existe un tal y?) y entonces $u = B(Ay) = (BA)y$, de modo que $u \in \mathrm{col}(BA)$ (proponer una segunda prueba).
c) Es inmediato: $\forall u \in \mathrm{Nul}(A)$ es $(BA)u = B(Au) = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Nul}(BA)$.
d) Dado que por c) $\mathrm{Nul}(A) \subset \mathrm{Nul}(BA)$, sólo resta probar que $\mathrm{Nul}(A) \supset \mathrm{Nul}(BA)$: $u \in$

$\mathrm{Nul}(BA)$ sii $(BA)u = 0$, o bien $B(Au) = 0 \Rightarrow Au = 0$ (¿ porqué vale la implicación?) y entonces $u \in \mathrm{Nul}(A)$.
e) Por a) es claro que $\mathrm{rango}(BA) \leq \mathrm{rango}(B)$. Además, por la observación sobre $\mathrm{fil}(BA)$ hecha en a), también resulta $\mathrm{rango}(BA) \leq \mathrm{rango}(A)$.
f) No es más que un corolario de b) ; g) No es más que un corolario de d).
(En ninguna de estas pruebas se utilizó la sugerencia: hágase ahora.)

16. En lugar de una prueba independiente, preferimos mostrar que son sólo reformulaciones de resultados ya vistos, para lo cual basta tener a la vista el ejercicio 9, 14.e, 13.f. y el resultado $\det(A) = 0$ sii las columnas de A son l.d. (precisar en detalle el modo en que se encadenan los argumentos).

17. $T^{-1}[(a\ b\ c)^T] = (\frac{1}{2}b,\ c - \frac{1}{2}b,\ a - b + c)^T$.

18. $T^{-1}[f] = f(t)/(1 + t^2)$.

19. $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_3 \ / \ T^{-1}[(a\ b\ c)^T] = (a - bt_0 + 2c) + (b - 4ct_0)t + 2ct^2$. (¿ es el núcleo o la imagen de T^{-1} dependiente de t_0?)

20. Ya sabemos que la composición de TLs es una TL, de modo que sólo debemos probar que $T^{-1} \circ S^{-1}$ es la inversa de $S \circ T$. $[T^{-1} \circ S^{-1}] \circ [S \circ T] = T^{-1} \circ [S^{-1} \circ S] \circ T = T^{-1} \circ I_W \circ T = T^{-1} \circ T = I_V$; en forma similar resulta $[S \circ T] \circ [T^{-1} \circ S^{-1}] = I_Z$, y con esto queda probado que $T^{-1} \circ S^{-1}$ es la inversa de $S \circ T$.

21. a) Alcanza tomar $T = I_V$; b) Basta observar que siendo T biyectiva también lo es T^{-1} (probarlo); c) Debe probarse que la composicin de TLs biyectivas también lo es (probarlo); d) Es precisamente lo que se hiciera en TP1. Ej. 20; e) Es una reformulación de 14 d).

22. $[T]_{BC} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $T(-2 + 3t - t^2) = 3 - 3t + 3t^2 - t^3$.

23. Es la matriz $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ con todos sus elemento nulos, excepto $a_{i,i+1} = i$, para $i = 1, \ldots, n$.

24. $[T]_{E_{2\times2},E_1} = [1\ \ -1\ \ 2\ \ -2]$.

25. $\forall x \in V, c_C(T(x)) = [T]_{BC}.c_B(x)$ y entonces $c_D([S \circ T](x)) = [S]_{CD}.c_C(T(x)) = [S]_{CD}.[T]_{BC}.c_B(x)$, y de allí el resultado, por unicidad de la representación matricial en un par de bases dadas.

26. Para $k = 2$, basta hacer $S = T$ en el ejercicio anterior, luego inducción.

27. a) $u \in \mathrm{Nu}(T)$ sii $T(u) = 0_W$ sii $c_C[T(u)] = c_C(0_W)$ sii $A.c_B(u) = 0_{K^n}$ sii $c_B(u) \in \mathrm{Nul}(A)$. (Justifique cada sii.)
b) $u' \in \mathrm{Im}(T)$ sii $\exists u \in V : T(u) = u'$ sii $A.c_B(u) = c_C(u')$ sii $c_C(u') \in \mathrm{col}(A)$. (Justifique cada sii.)
c) Basta organizar resultados ya conocidos: T es inversible sii transforma una base de V en una de W (y dado que un conjunto de vectores es l.i. sii sus coordenadas forman un conjunto l.i., Cf. TP1, 20.iii) sii las columnas de A (que son precisamente las coordenadas en base C de los transformados de la base B) son l.i. sii A es inversible. (Proponer una

prueba directa con menos remisiones). Probada la existencia de A^{-1}, el resto debiera ser inmediato.

28. a) $\{0\}$; b) $\{0, i, -i\}$; c) $v \in \mathrm{Im}(T)$ sii $r = i$, siendo $u = k(v_1 + iv_2) + (1+i)v_2 + v_3$, con $k \in \mathbb{C}$.

29. a) $\alpha = 2 \vee \beta = 0$.
b.1) Si $\alpha \neq 2$ y $\beta \neq 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{P}_2$ y $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.
b.2) Si $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{2t + bt^2, b + t\}$ y $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{gen}\{(1\ 1\ -1)^T\}$.
b.3) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta = 0$, $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{t\}$ y $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{gen}\{(1\ 2\ 0)^T,\ (0\ \ a-1\ \ 1)^T\}$.
c) $T(\mathcal{U}) = \mathrm{gen}\{(2-\alpha)t\}$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$.

30. $[T]_{E_2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1-i & 1+3i \\ 1+i & -1+i \end{bmatrix}$.

31. $[T]_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

32. a) $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{gen}\{v_1 + v_2 - v_3\}$, $\mathrm{Im}(T) = \{w_1 + w_2 + w_3 - w_4, 2w_1 + 3w_3 + 2w_4\}$.
b) No existe tal v pues el vector dado no pertenece a la imagen.
c) $[T]_{B'C'} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & 15 & 10 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

33. Recordar que la reflexión de un vector v sobre un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$ es el vector $w = \mathcal{P}_{\mathcal{S}}(v) - \mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp}(v)$.
a) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. b) $[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. c) $[T]_B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

34. Se aplica la observación del anterior para obtener la matriz en una base $B = B_{\mathcal{S}} \cup B_{\mathcal{S}^\perp}$ pasando luego a la base canónica. $[T]_E = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -12 & -6 & 4 \\ -6 & 4 & -12 \\ 4 & -12 & -6 \end{bmatrix}$; verificar que la matriz obtenida es involutiva y simétrica .

35. $[T]_E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

36. $[T]_E = \begin{bmatrix} 1{,}1984 & -0{,}1638 & 0{,}3796 \\ 1{,}3515 & 0{,}7280 & 2{,}1632 \\ -0{,}3781 & -0{,}1097 & 0{,}4877 \end{bmatrix}$. (¿Qué resultado arroja la matriz a la octava?)

37. Podría ser una reflexión respecto de $\mathcal{S}$ (o también respecto de $\mathcal{S}^\perp$) tal como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :\ T[(x\ y\ z)^T] = 1/3(-x + 2y + 2z\ \ 2x - y + 2z\ \ 2x + 2y - z)^T$.

Más generalmente, como $d(v, \mathcal{S}) = \|\mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp} v\|$, T debe ser tal que $\|\mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp} T(x)\| = \|\mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp} x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$. Si tomamos una b.o.n cualquiera de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 \in \mathcal{S}$ y $v_2,\ v_3 \in \mathcal{S}^\perp$, y elegimos tres vectores w_1, w_2 y w_3 tales que $w_1 \in \mathcal{S}$, $w_2, w_3 \in \mathcal{S}^\perp$, $\|w_2\| = \|w_3\| = 1$ y $w_2 \perp w_3$, tenemos que la TL T definida mediante $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$ y $T(v_3) = w_3$, verifica la condición $\|\mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp} T(x)\| = \|\mathcal{P}_{\mathcal{S}^\perp} x\|\ \forall x \in \mathbb{R}^3$, y por lo tanto una de las condiciones del ejercicio (Demostrarlo). Ahora sólo basta con elegir los w_i para que T sea diferente de $\pm I$.

38. Considerando el ejercicio 27 (con el resultado del TP1,Ej.20), el argumento es directo: el común valor de los rangos no es sino la dimensión de la imagen de T. (Proponer una prueba alternativa.)

39. Para la primera, puede proponerse una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1\ 0\ 0)^T$, $v_2 = (0\ 0\ 1)^T$, $v_3 = (2\ -1\ 0)^T$ mientras que los dos primeros vectores de B' sean $T(v_1)$, $T(v_2)$ y los dos restantes completen una base de $\mathbb{R}^4$. No existe un par para el segundo caso por el ejercicio anterior.

40. (a) Para hallar U_1 y V_1 considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$. Luego busque bases B, B' tales que $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ahora, teniendo en cuenta que A es la representación matricial de T en las bases canónicas y lo anterior, debería poder hallar sin dificultad U_1 y V_1.
(b) Idem (a).
(c) Tenga en cuenta que $U_1 A V_1 = U_2 B V_2$.

Comentario general: con argumentos similares a los usados arriba puede demostrarse que dadas dos matrices $A, B \in K^{n\times m}$ con rango(A) = rango(B), existen matrices inversibles $C \in K^{n\times n}$ y $D \in K^{m\times m}$ tales que $CAD = B$. A partir de esto último se puede demostrar que dada $T : V \to W$ con $\dim(V) = m$ y $\dim(W) = n$, una matriz $A \in K^{n\times m}$ es representación matricial de T para ciertas bases B de V y B' de W si y sólo si rango$(A) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

41. Procediendo como en el ejercicio anterior, encuentre matrices inversibles U y V tales que $UAV = [T]_{BC}$. Teniendo en cuenta que $A = [T]_{E_3E_2}$, resulta que $U = C_{E_2C}$ y $V = C_{BE_3}$ (probarlo) y de allí pueden determinarse las bases B y C buscadas (¿Cómo?). Un par de bases posible es $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (2\ 0\ 0)^T$, $v_2 = (0\ 1\ 0)^T$, $v_3 = (0\ 4\ 1)^T$, mientras que $C = \{(-3\ \ 2)^T, (2\ \ -1)^T\}$.

42. Basta recorrer la axiomática, probar la linealidad y biyectividad de la aplicación; la dimensión es el producto de las dimensiones de los EV entre los que se toman las transformaciones.

    Una posible base de $\mathcal{L}(V, W)$ es la siguiente: Tome una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y una base $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ de W. Para cada par i, j con $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, defina $T_{ij} : V \to W$ mediante $T_{ij}(v_i) = w_j$, $T_{ij}(v_k) = 0$ si $k \ne i$. Para probar que $\{T_{ij}\}$ es base de $\mathcal{L}(V, W)$ basta con ver que $\{[T_{ij}]_{BC}\}$ es base de $K^{m\times n}$ (justifique y pruebe que la última es base de $K^{m\times n}$.)