ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico Nº 3
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. Q^tQ (Q^HQ) es una matriz diagonal (que comparte con Q el número de columnas, espacio nulo y rango), siendo el i-ésimo elemento de la diagonal igual a la norma de la i-ésima columna de Q.

2. Notamos $I = I_n$. Es claro que cualquiera sea $\mathbf{v}$ en K^n es $\mathbf{v} = P\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P\mathbf{v})$, donde $P\mathbf{v} \in \text{col}(P)$ (¿por qué?) mientras que $(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) \in [\text{col}(P)]^{\perp}$, dado que es ortogonal a cualquier vector $P\mathbf{x} \in \text{col}(P)$. (para esto, considerar el producto $(P\mathbf{x}, \mathbf{v} - P\mathbf{v}) = \mathbf{x}^{\mathbf{H}} P^H (I - P)\mathbf{v} = \mathbf{x}^{\mathbf{H}} (P^H - P^H P)\mathbf{v} = \mathbf{x}^{\mathbf{H}} (P - PP)\mathbf{v} = \mathbf{x}^{\mathbf{H}} (P - P^2)\mathbf{v} = \mathbf{x}^{\mathbf{H}} (\mathbf{0})\mathbf{v} = 0$). Luego, $P\mathbf{v}$ es tal como se enuncia. (Y entonces $(I - P)\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $[\text{col}(P)]^{\perp}$).

3. P es hermítica ($P^H = (\mathbf{w}\,\mathbf{w}^{\mathbf{H}})^H = \mathbf{w}\,\mathbf{w}^{\mathbf{H}} = P$) e idempotente ($P^2 = \mathbf{w}\,(\mathbf{w}^{\mathbf{H}}\mathbf{w})\,\mathbf{w}^{\mathbf{H}} = \mathbf{w}\,\mathbf{w}^{\mathbf{H}} = P$), de modo que es de proyección; y como col (P) = gen { $\mathbf{w}$ } (¿por qué?), su rango es 1 y proyecta precisamente sobre gen { $\mathbf{w}$ }.

4. Notamos $I = I_n$. Considerando que P es de proyección, resulta que $(I - P)^H = I^H - P^H = I - P$, y además $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, con lo cual, $I - P$ es de proyección.
Para la otra implicación, si $I - P$ es de proyección, debe ser $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$, de donde $P = P^2$, y además $P^H = [I - (I - P)]^H = I^H - (I - P)^H = I - (I - P) = P$, de modo que P es de proyección. Además, $I - P$ proyecta sobre $[\text{col}(P)]^{\perp}$ como se vio en el ej. 2.

5. a. Falso, pues con Q = (2) es $QQ^H = (4)$ que no es idempotente;
b. Falso y vale el mismo contraejemplo anterior;
c. Verdadero puesto que llamando $P = QQ^H$ entonces $P^2 = Q(Q^HQ)Q^H = QQ^H = P$ (la segunda igualdad por el ejercicio 1) y $P^H = (QQ^H)^H = (Q^H)^H Q^H = QQ^H = P$;
d. Verdadero puesto que para todo $\mathbf{v}$ en K^n, de ser $P\mathbf{v} = P'\mathbf{v}$, o lo que es lo mismo $(P - P')\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{v}$, resultaría (¿por qué?) $P = P'$;
e. Verdadero, pues si el rango no fuera a lo sumo (n – 1) debería ser n, y por lo tanto P sería regular (inversible) , y como $P^2 = P$, resultaría, premultiplicando por P^{-1}, $P = I$ contra la hipótesis;
Otra forma de mostrar que el enunciado dado es verdadero es considerar que si el rango de P es n, entonces $\text{col}(P)=K^n$, con lo cual P es la matriz de proyección sobre K^n, esto es, $P=I$.
f. Verdadero (basta observar el comentario en e.)

6. a. $P = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; b. $P = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; c. $P = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Dado que (justificar y detallar) $\text{col}(AB) \subset \text{col}(A)$ y rango(A) = 2 = rango (AB), resulta $\text{col}(AB) = \text{col}(A)$, y de allí la matriz de proyección $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Observar que por ser $x^tA=0$, x es ortogonal a cada columna de A. Por lo tanto, gen{x} $\subset [\mathrm{col}(A)]^\perp$ Como gen{x} y $[\mathrm{col}(A)]^\perp$ tienen igual dimensión (por qué?), resulta que $[\mathrm{col}(A)]^\perp$ = gen{x} (justificar) y entonces $P=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

Qué sucedería si el rango de A fuera 2 en lugar de 3?

9. La matriz I – P proyecta (ver ej. 4) sobre $[\mathrm{col}(P)]^\perp$ cuya dimensión es $n-k$.

10. i. Es simétrica e idempotente; ii. $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

11. a. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 5\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1/6\\ 0 & 1 & -2/6\\ 1 & 1 & 1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 9/2\\ 0 & 1 & 4/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6}\\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 9\sqrt{2}/2\\ 0 & \sqrt{3} & 4\sqrt{3}/3\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$

12. De la igualdad $A= Q_0 R_0$, resulta que col(A) $\subset$ col(Q_0). Dado que el rango R_0 es m (¿por qué?), R_0 es inversible, con lo cual $A R_0^{-1} = Q_0$, y de ahí, col (Q_0) $\subset$ col (A). Luego, col (A) = col (Q_0). De la triangularidad de R_0 se desprende la última afirmación (detallar).

13. Dado que A = QR, resulta que col(A) $\subset$ col(Q); como además, dim col(Q) = k = rango de A= =dim col(A), resulta col(A) = col(Q).

Obs.: Supongamos dadas todas la hipótesis del ej. 13 excepto “rango de A = k”. Veamos cómo, en ese caso, también se puede probar el mismo resultado. Como A = QR, resulta que col(A) $\subset$ col(Q). Probemos ahora que col(Q) $\subset$ col(A); para ello, basta ver que cada columna de Q está en col(A). La i-ésima columna de Q, Q_i, es $Q_i = Qe_i$ con $e_i = (0 \ldots 1\ 0 \ldots 0)^t$. Por otra parte, como R tiene rango k, col(R) = R^k, con lo cual, existe $x_i \in R^m$ tal que $Rx_i = e_i$. Luego, $Ax_i = QRx_i = Qe_i = Q_i$ y entonces $Q_i \in$ col(A).

14. R no se ajusta a definición (¿por qué?); sí (exhibirla).

15. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n}\,\boldsymbol{a}_1 & \dots & \sqrt{n}\,\boldsymbol{a}_{n-1} \end{pmatrix}$.

16. a. $\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^T$; b. $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T + \boldsymbol{a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T$

¿para qué valor de $\boldsymbol{a}$ *se tiene una solución de longitud mínima y cuál es tal solución?*.
Para $\alpha = 4/3$, siendo la correspondiente solución óptima $1/3\ (7, -1, 8)$.

17. No.

18. a. $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{18}{5} \end{pmatrix}^T + \boldsymbol{a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$; b. $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$.

19. VVFVFVV.

20. Se aplica directamente el resultado: *si w es una solución por cuadrados mínimos de Ax = b, entonces toda otra solución es de la forma u = w + h , con h Î Nul (A)* [Prueba: siendo *w* una solución, sea *u* otra cualquiera, luego (¿por qué?) *A u =A w* Þ *A (u – w) =* ***0***, es decir *(u – w) Î Nul (A)* y de allí el resultado escribiendo *u = w + (u – w)*] . La afirmación recíproca es obviamente verdadera, esto es que siendo *w* una solución, *w + h* es otra solución, cualquiera sea *h* en el espacio nulo de A (probarlo).

Así se tiene $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T + \boldsymbol{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$; en cuanto a la segunda parte, como $A\ \hat{x}$ = =$P_{col(A)}$ (*b*), *b = A* $\hat{x}$ *+ h'*, con *h' Î [col (A)]* $^{\wedge}$*, es decir* $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T + \boldsymbol{b} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$, y con la restricción $\| b \| = 3$, resulta $\boldsymbol{b} = \pm \frac{3}{\sqrt{14}}$, obteniéndose dos valores de *b*.

Rehacer con $\|b\| = \sqrt{6}$, explicar.

21. a. Si x ∈ Nul ($A^H A$) debe ser $A^H A$ x = **0** Þ x^H $A^H A$ x = $|| Ax ||^2 = 0 \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in$ Nul (A); por otra parte, si x ∈ Nul (A) es ($A^H A$)x = A^H (A x) = $A^H \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow x \in$ Nul ($A^H A$).
b. Dado que A y $A^H A$ tienen el mismo número (*m*) de columnas, e igual nulidad (como consecuencia de a.), deben tener el mismo rango
c. Es obvia consecuencia de b.
d. Las ecuaciones normales $A^H A\ \hat{x} = A^H b$ tienen solución única si, y solo si, las columnas de $A^H A$ son l.i., y por lo anterior, esto equivale a que las columnas de A sean l.i., y entonces tal solución es $\hat{x} = (A^H A)^{-1} A^H b$; la comprobación es inmediata.

22. a. La pseudo inversa de A es $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

23. Sea $b \in R^n$. Por el ej. 19 b) sabemos que si $\hat{x}$ es solución por cuadrados mínimos de la ecuación Ax = *b*, entonces A $\hat{x}$ = $P_{col(A)}$ (*b*) = P_S(*b*). Por otra parte, como el rango de A es m, tenemos que $\hat{x}$ = $(A^t A)^{-1} A^t b$ (por ej. 21 d)), con lo cual, A $\hat{x}$ = $[A (A^t A)^{-1} A^t] b$ = P *b* = P_S(*b*), y por lo tanto, P = $A (A^t A)^{-1} A^t$ es la matriz de proyección sobre S.
(Otra forma de resolverlo es mostrar que la matriz P definida es simétrica e idempotente, y que col(A) = col(P)).

24. a. *y = 9 / 10 + 2 / 5 x;*

b. Cualquier recta (¡excepto la vertical !) que pase por el punto $(1, 2/3)$.
(De la familia de rectas ¿alguna es preferible?)

25. La solución por cuadrados mínimos del $Ax = b$ es única si, y solo si, (ejercicio 21) las columnas de A son l.i.; en el presente caso A tiene dos columnas y siendo la primera formada por "1", la segunda por las abscisas, resulta que A tendrá columnas l.i. si, y solo si, estas columnas no son proporcionales, esto es, si, y solo si, no todas las abscisas son iguales.

26. a. $p(t) = -0.7000 + 5.6040\, t$, con velocidad 5.6040;
b. $p(t) = -0.1100 + 5.0983\, t + 0.0843\, t^2$, con aceleración 0. 1686 (y velocidad inicial 5. 0893);
c. La segunda, pues en este caso, la norma del error es la centésima parte de la del primero.

27. Basta plantear las ecuaciones normales.