ALGEBRA II. FIUBA
Segundo cuatrimestre de 2004

Sugerencias para la resolución del trabajo práctico Nº 2
(por Fernando Acero con la colaboración de Ada Cammilleri)

1. α = arc cos ($\sqrt{84}/12$) para el canónico, β = arc cos ($13/\sqrt{276}$) para el segundo p.i. (comprobar que efectivamente es un p.i.).

2. $w^{\perp}$ = gen { (1, 0, 1), (2, -1, 0) } es un subespacio de R^3.

3. a) El conjunto V_0 contiene al **0**, pues (**0** , **w**)= 0 cualquiera sea **w** (pruébese) y si dos vectores **x** , **y** pertenecen a V_0 siendo α un escalar cualquiera es (α **x** + **y** , **w**) = $\overline{\alpha}$ (**x** , **w**) + (**y** , **w**) = 0 donde la primera igualdad se verifica por dos axiomas de la definición de p.i.(¿cuáles?), la segunda por hipótesis (¿cuál?) y de allí resulta que α **x** + **y** pertenece a V_0 , y entonces (¿por qué?) V_0 es un subespacio de V.
b) En el caso V= R^n, V_0 ={x $\in$ R^n tales que (x,w)=0}={ x $\in$ R^n tales que $x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_nw_n=0$}. Como w no es nulo, se verifica que dim(V_0) = n-1 (ya que V_0 contiene a todas las soluciones de un sistema lineal homogéneo que consta de una ecuación no nula). El caso V=C^n se resuelve en forma análoga.

4. a) Deben ser números reales tales que $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$ y $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} > 0$ (de aquí se deduce que, en particular, también $a_{22} > 0$). Respecto de cómo hallar la condición $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} > 0$, suponiendo haber determinado que debe verificarse $a_{12} = a_{21}$, $a_{11} > 0$, como uno de los axiomas de la definición de p.i. exige que (x,x) $\geq$ 0, y si (x,x)=0 entonces necesariamente x=0, considerar

$(x,x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 = (\sqrt{a_{11}}\ x_1+\dfrac{a_{12}x_2}{\sqrt{a_{11}}})^2 + (a_{22}-\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}})\,x_2^2$. Para que esta expresión

sea una suma de cuadrados (y en tal caso probar dicho axioma), debe ser $(a_{22}-\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}})>0$

b) La comprobación es inmediata. Respecto de la A hallada, se trata de una matriz simétrica con determinante y diagonal principal positiva.

5. a) Siendo **u = u – v + v** es || **u** || = || **u – v + v** || $\leq$ || **u – v** || + || **v** || y de allí || **u** || - || **v** || $\leq$ || **u – v** ||; ahora rehacer intercambiando u con v y se tiene la desigualdad pedida.

b) Considerar que || **u** $\pm$ **v** $||^2$ = (**u** $\pm$ **v** , **u** $\pm$ **v**) = || **u** $||^2$ $\pm$ 2 Re(**u** , **v**) + || **v** $||^2$. En un espacio real, es || **u + v** $||^2$ = (**u + v** , **u + v**) = || **u** $||^2$ + 2 (**u** , **v**) + || **v** $||^2$ de modo que es inmediato que la igualdad || **u + v** $||^2$ = || **u** $||^2$ + || **v** $||^2$ se verifica si, y solo si, (**u** , **v**) = 0.

Proponer un ejemplo que muestre que puede tenerse la igualdad pitagórica *sin* la ortogonalidad en un espacio complejo con p.i..

c) Basta considerar que || **u** $\pm$ **v** $||^2$ = (**u** $\pm$ **v** , **u** $\pm$ **v**) = || **u** $||^2$ $\pm$ 2 Re(**u** , **v**) + || **v** $||^2$ y sumar las dos igualdades.
d) como en c) pero restando.

e) Considerar las expresiones de || **u** $\pm$ **v** $||^2$ y || **u** $\pm$ **i v** $||^2$. Además tener en cuenta que si z es complejo, Re(-iz) = Im(z); podemos hallar, usando d), que Im((**u** , **v**))= Re (-i (**u** , **v**)) = Re((**u** ,**-i v**)) y de allí el resultado.

Detallar y justificar las igualdades.

6. Por ejemplo, en a), dado u $\in$ V, para verificar $(u,u)_V=(c_B(u),c_B(u))=0 \Rightarrow u=0$ (esto es, u debe ser el vector nulo), como (,) es un p.i. en R^n (o en C^n), de ser $=(c_B(u),c_B(u))=0$ necesariamente $c_B(u)=0$ (el vector columna con todas las componentes nulas), con lo cual u=0. (recordar propiedades de c_B)

Respecto de b), para mostrar uno de los axiomas, dado u $\in R^n$ (o C^n), si $(u,u)=(c_B(u)^{-1}, c_B(u)^{-1})_V=0$, como $(,)_V$ es un p.i. en V, debe ser $c_B(u)^{-1}=0$ (el vector nulo de V), pero entonces u=0 (pues el vector nulo de V tiene coordenadas todas nulas, recordar propiedades de c_B^{-1})

7. Respecto de probar que la definición dada corresponde a un p.i., esto puede demostrarse, por ejemplo, a partir del ejercicio 6 a) considerando B={ 1, t , t^2 } y el producto interno canónico en R^3. Luego, por cálculo directo, es $\| 1 \| = \| t \| = \| t^2 \| = 1$; $0 = (1, t) = (1, t^2) = (t, t^2)$.

8. a) Verificar la axiomática es inmediato, excepto cuando se trata de probar que *la única* función *f* para la cual $\int_0^1 f^2 = 0$, es la nula.

Para ello, considerar el siguiente resultado de Análisis: si g:[a,b] $\longrightarrow$ R es continua, g(x) ≥ 0 $\forall$ x$\in$ [a,b] y $\int_a^b g(x)dx = 0$ entonces g(x)=0 $\forall$ x$\in$ [a,b]. Observar que la continuidad es fundamental para obtener tal conclusión. Encontrar un ejemplo en el cual se defina una función g, con un número finito de discontinuidades en [a,b], para la cual se verifique que g(x) ≥ 0 $\forall$ x$\in$ [a,b] y $\int_a^b g(x)dx = 0$, pero tal que g no sea la función nula.

$\left| \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, dt}\ \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\, dt}$ es la expresión de la desigualdad de Schwarz en este caso.

b) Argumentar con el cumplimiento de los axiomas en el subespacio.

c) α = arc cos ($\sqrt{30/7}\ \ 5/12$) ; a = - ½.

9. Probamos directamente 9e), del cual el resto es un ejemplar; siendo $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{v_i}, \mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{v}_j$ se tiene que

$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\sum_i x_i \mathbf{v_i}, \sum_j y_j \mathbf{v}_j) = \sum_i \sum_j \overline{x_i}\ (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) y_j = \overline{c_B^t(\mathbf{x})}\ G\ c_B(\mathbf{y})$, la segunda igualdad debida a axiomas y propiedades del p.i. (¿cuáles?, detallar), la tercera a la definición de coordenadas, producto matricial y definición de G (esto es $G_{ij} = (\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j})$), de lo que es inmediato que $G = \overline{G^T}$ (pues es $G_{ij} = (\mathbf{v_i}, \mathbf{v_j}) = \overline{(\mathbf{v_j}, \mathbf{v_i})} = \overline{G_{ji}}$, la segunda igualdad por axioma del p.i.) y además para cualquier elemento X $\in K^n$ (distinto del nulo) se verifica $\overline{X}^T\ G\, X > 0$ (pues basta ver que tomando $\mathbf{x} = c_B^{-1}(X)$ es también **x** no nulo(¿por qué?) , y por lo tanto (**x** , **x**) es positivo, y entonces, *a posteriori* $\overline{X}^T\ G\, X > 0$), de modo que efectivamente es G una matriz definida positiva. Ahora, recíprocamente, sea G una matriz definida positiva, definiendo $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{c_B^t(\mathbf{x})}\ G\ c_B(\mathbf{y})$ se tiene efectivamente un p.i. (probar los axiomas) en V. Además debe ser claro que la matriz G es diagonal cuando la base B ortogonal (y G es la identidad cuando la base B es ortonormal).

Ahora, y como añadido, proponemos probar que det(G) > 0 (con lo cual, particularmente G es inversible). También se propone exhibir una matriz G simétrica con determinante positivo para la que no exista una base B tal que satisfaga lo anterior.

Recordar la caracterización obtenida en el ejercicio 4) para el caso de una matriz de 2x2.

d) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$; $(t, t^2 - t + 1) = 5/12$.   f.) $G = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & i \\ 1+i & 3 & i \\ -i & -i & 1 \end{pmatrix}$

10. a) 1/3; b) $G = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

11. Si hubiese un X no nulo que satisfaciera G X = **0** , sería también $X^H G X = 0$ contra la suposición de que G es definida positiva.

12. $$\left\|\sum_i x_i \mathbf{v_i}\right\|^2 = (\sum_i x_i \mathbf{v_i}, \sum_j x_j \mathbf{v}_j) = \sum_i \sum_j \overline{x_i}\,(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) y_j = \sum_i \overline{x_i}\,\|\mathbf{v}_i\|^2\, x_i = \sum_i |x_i|^2\,\|\mathbf{v}_i\|^2$$
donde la tercera igualdad procede por hipótesis (¿de qué modo exactamente?).

13. $c_B(t^2 - 1) = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\|t^2 - 1\| = \sqrt{\frac{8}{15}}$

14. La descomposición (única) es $(1\ 1\ 1)^T = 1/3\ (1\ 2\ -1)^T + 1/3\ (2\ 1\ 4)^T$.

15. a. $P_S(\mathbf{v}) = 1/6\ (5\ -1\ 1)^T$; $d(\mathbf{v}, S) = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

b. $P_S(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a - bi + (1+i)c \\ ia + b + (i-1)c \\ (1-i)a - (1+i)b + 2c \end{pmatrix}$;

$d(\mathbf{v}, S) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \frac{1}{4}|a - ib + (1+i)c|^2}$

c. $P_S(\mathbf{v}) = 2t + 5/6$; $d(\mathbf{v}, S) = \frac{\sqrt{5}}{20}$

16. En este ejercicio es importante lo que se haya tomado por definición de $P_S(\mathbf{v})$; si partimos del resultado $S \oplus S^\perp = V$ (supuesta dim(V) finita), para cualquier **v** existe una descomposición única $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ con $\mathbf{v_1} \in S$, $\mathbf{v_2} \in S^\perp$ y ahora *definimos* $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v_1}$ (y entonces resulta $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v_2}$). Así tenemos, reescribiendo lo anterior, que es $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + P_{S^\perp}(\mathbf{v})$.

a. Si $\mathbf{v} \in S$ es claro que $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ con $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{0} \in S^\perp$ de donde, *por esta definición*, es $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Vale también la recíproca, esto es, que si $P_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ entonces $\mathbf{v} \in S$ (probarlo). Además de cada resultado se obtiene también el referido al complemento (pues basta notar que siendo S el complemento ortogonal de $S^\perp$), de modo que a) también puede leerse del siguiente modo: $\mathbf{v} \in S^\perp$ sii $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ y también $\mathbf{v} \in S$ sii $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, etc.

b. De $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + P_{S^\perp}(\mathbf{v})$ se tiene (¿por qué?) $\|\mathbf{v}\|^2 = \| P_S(\mathbf{v})\|^2 + \| P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2$ y de allí el resultado observando que $\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v}) = P_{S^\perp}(\mathbf{v})$.

c. Basta ver que $\|\mathbf{v}\|^2 = \| P_S(\mathbf{v})\|^2 + \| P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 \geq \| P_S(\mathbf{v})\|^2$ con la igualdad cumpliéndose si $\| P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 = 0$, es decir sii (¿por qué?) $P_{S^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ o lo que es lo mismo , $\mathbf{v} \in S$. (*es claro que también vale la recíproca, esto es que si se da la igualdad*, $\mathbf{v} \in S$. (*¿por qué?*)).

Si se ha definido, para $\mathbf{v} \in V$, la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S, $P_S(\mathbf{v})$, como el único vector de S tal que $\mathbf{v} - P_S(\mathbf{v})$ es ortogonal a S, consideramos

a) cuando $\mathbf{v} \in S$, verificar que $\mathbf{v}$ cumple la definición de proyección ortogonal sobre S.
b) Escribir $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - P_{S^\perp}(\mathbf{v}))$ y aplicar Pitágoras.
c) $\|\mathbf{v}\|^2 = \| P_S(\mathbf{v})\|^2 + \| P_{S^\perp}(\mathbf{v})\|^2 \geq \| P_S(\mathbf{v})\|^2$
d) Es la definición de proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre S.
e) Considerar $\mathbf{v} = P_S(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - P_{S^\perp}(\mathbf{v}))$ y mostrar que la intersección entre S y $S^\perp$ es nula.(con lo cual concluimos que suponiendo que exista $P_S(\mathbf{v})$ para cada $\mathbf{v} \in V$, resulta $S \oplus S^\perp = V$).

17. $B = \left\{ (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T, (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)^T, (1 \quad -1 \quad -1 \quad 1)^T \right\}$; $P_S(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, pues $\mathbf{w} \in S$.

18. Resulta la BOG del ejercicio 13, luego se normaliza.

19. Usando 16 d), buscamos w∈ S tal que u-w resulte ortogonal a S. Para ello, planteamos

w= $a\,(1\ -1\ 0)^T + b\,(1\ 0\ 1)^T$ y buscamos a , b tales que u-w verifique lo señalado. Resulta $P_S(\mathbf{u}) = 1/3\ (1\ \ 1\ \ 2)^T$.

20. Si $\mathbf{w} \in S^\perp$, $\mathbf{w}$ es ortogonal a todo vector de S, en particular lo es a los vectores que generan S. Para la recíproca, sea $\mathbf{x}$ un vector cualquiera de S, (y entonces es $\mathbf{x} = \sum_{1}^{r} x_i\, \mathbf{v}_i$) y $\mathbf{w}$ un vector ortogonal a los $\mathbf{v}_i$,$\forall\ i \in [1, r]$; entonces se tiene $<\mathbf{w}, \mathbf{x}> = (\mathbf{w}, \sum_{1}^{r} x_i\, \mathbf{v}_i) = \sum_{1}^{r} x_i\, (\mathbf{w}, \mathbf{v}_i) = 0$ luego $\mathbf{w} \in S^\perp$.

21. a. $S^\perp = \{ (x\ \ y\ \ z\ \ w)^T \in R^4 / x = y,\ z = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T, (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T \}$.

b. $S^\perp = \{ (x\ \ y\ \ z\ \ w)^T \in R^4 / 2x = y,\ z = 0 \} = \text{gen}\{ (1\ \ 2\ \ 0\ \ 0)^T, (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T \}$.

c. $S^\perp = \{ (x\ \ y\ \ z)^T \in C^3 / x = (i - 1)\, z,\ y = (2 - i)\, z\} = \text{gen}\{ (i - 1\ \ 2 - I\ \ 1)^T \}$.

22. a) La definición de producto matricial expresa precisamente que S está formado por los vectores de R^n ortogonales (con el producto interno canónico) a las filas de A. Es decir : $S = (\text{Fil}(A))^\perp$, o también, $S^\perp = \text{Fil}(A)$. Por lo tanto, podemos escribir, $\text{Nul}(A) = (\text{Fil}(A))^\perp$.
Luego n- dim(S) = n- dim Nul(A) = rango de A (dado que S = Nul(A)). Además, n-dim(S)= dim $S^\perp$.
Si se reemplaza R por C, se trata de las filas conjugadas de A (¿por qué?).

En este caso podemos escribir Nul(A)=(Fil($\overline{A}$))$^{\perp}$, donde $\overline{A}$ es la matriz que se obtiene a partir de A conjugando todos sus coeficientes.

b) i. B = { (2, 1, -1) }; ii. Los primeros r vectores canónicos ; iii. B = { $(1\ \ i\ \ 1+i\ \ 0)^T$ $(0\ \ 2-i\ \ 0\ \ 1)^T$ } .

c) S = { $(x\ \ y\ \ z)^T \in R^3$ / $x + y - 2z = 0$ }.

23. Como dim(S) es finita, está garantizada la existencia de P_S (**v**), para cada **v** ∈ V. Luego, mostrar que el vector **v** - P_S (**v**) verifica la definición de proyección ortogonal sobre $S^{\perp}$.
En el caso que S sea un subespacio descripto por ecuaciones lineales, para calcular P_S (**v**), se puede calcular $P_{S^{\perp}}$ (**v**), proyectando sobre el espacio generado por las filas de la matriz A que define las ecuaciones (¿por qué?) y luego restar este resultado de **v** (en el caso R^n)

24. Se desprende de modo natural del resultado $S \oplus S^{\perp} = V$ (dar detalles; recordar que cuando dos subespacios están en suma directa, la unión de una base del primero y una del segundo determina una base del subespacio suma entre ellos)

25. (**Corregir en el enunciado**: en la definición. del p.i.: el límite inferior de la integral debe ser 0)

a. B = { 1, 2 t – 1}
b. b. $P_{S^{\perp}}(\mathbf{g}) = t - 1/6$
c. c. $P_S(\mathbf{g}) = t^2 - t + 1/6$
d. d (**g** , S) = $\| P_{S^{\perp}}(\mathbf{g}) \|$

26. $\mathbf{v} = (2\ \ 2\ \ -1)^T \pm \sqrt{2}\,(2\ \ -2\ \ 0)^T$. (rehacer el ejercicio con $\|\mathbf{v}\| = 3$ y $\|\mathbf{v}\| = 2$, explicar).

27. a) Basta observar que $S^{\perp}$ = gen { **w** }, y entonces $P_{S^{\perp}}(\mathbf{v}) = \dfrac{\mathbf{w}^T\mathbf{v}}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}$ y de allí el resultado.

b) Aplicar a), luego es inmediato.

28. **En el enunciado debe decir**: $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\dfrac{\mathbf{w}^T\mathbf{v}}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}$.

b) $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\dfrac{\mathbf{w}^T\mathbf{v}}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w} = \left(\mathbf{v} - \dfrac{\mathbf{w}^T\mathbf{v}}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}\right) - \left(\dfrac{\mathbf{w}^T\mathbf{v}}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\mathbf{w}\right) = P_S(\mathbf{v}) - P_{S^{\perp}}(\mathbf{v})$.

c) Reflexión sobre el hiperplano S;

d) Reescribir *T*.

e) Observar que $\mathbf{H}^T = \left(\mathbf{I} - 2\dfrac{\mathbf{w}\ \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}}\right)^T = \mathbf{I}^T - 2\dfrac{(\mathbf{w}^T)^T\ \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}} = \mathbf{I} - 2\dfrac{\mathbf{w}\ \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}^T\mathbf{w}} = \mathbf{H}$;

además probar que **H H** = **I** (detallar y explicar);

f) Siendo **H** simétrica, es otro modo de decir que **H H** = **I** (explicar).

¿Qué parte de este ejercicio es aplicable cuando se trata de hallar la reflexión respecto de un subespacio que no es un hiperplano?

29. a. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -a-2b+2c \\ -2a+2b+c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix}$; b. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

30. Basta observar que $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$ y efectuar las operaciones.